التصحيح

الموضوع الأول

التمرين الأول: نعتبر المتتالية (Un) المعرفة على N بـ : $U_0=0$ و $U_1=3$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $U_{n+2}=\frac{3}{2}U_{n+1}-\frac{1}{2}U_n$

أ- **حساب U_2 ، U_3 و U_4** بعد الحساب نجد : $U_2=\frac{1}{2}$ ، $U_3=\frac{21}{4}$ و $U_4=\frac{45}{8}$

ب- **البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n :** $U_{n+1}=\frac{1}{2}U_n+3$: نسمي p(n) هذه الخاصية

*) نتحقق من صحة p(0) لدينا الطرف الأول $U_{0+1}=U_1=3$ و الطرف الثاني $\frac{1}{2}U_0+3=\frac{1}{2}\times0+3=3$ أي الطرفان متساويان

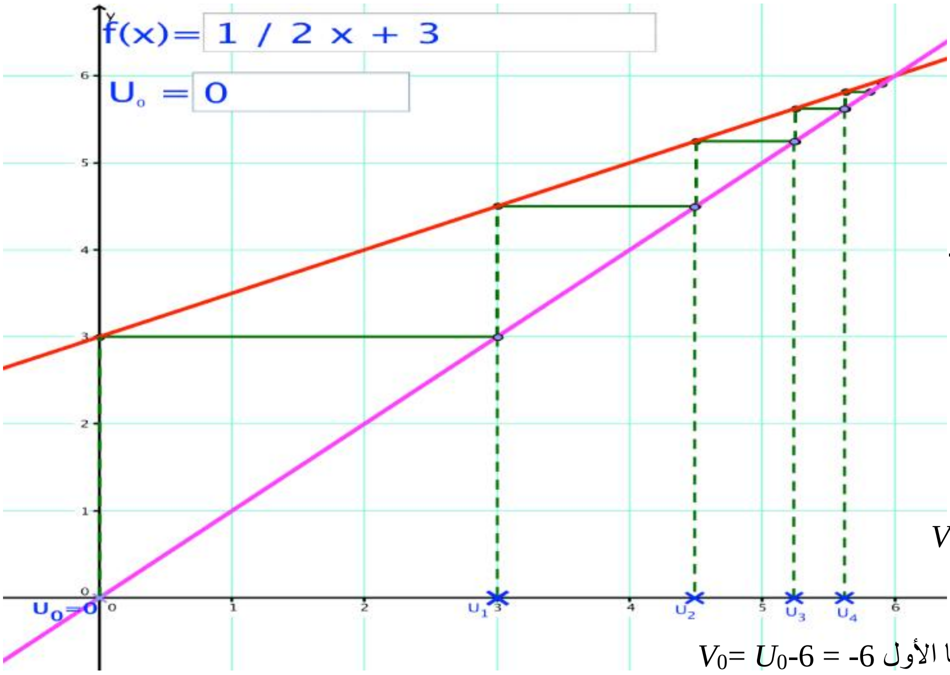
**) فرض أن p(n) صحيحة أي $U_{n+1}=\frac{1}{2}U_n+3$ من أجل كل عدد طبيعي (فرضية التراجع) و نبرهن صحة p(n+1) أي $U_{n+2}=\frac{1}{2}U_{n+1}+3$

لدينا $U_{n+2}=\frac{3}{2}U_{n+1}-\frac{1}{2}U_n$ من المعطيات أي $U_{n+2}=\frac{3}{2}U_{n+1}-(U_{n+1}-3)=\frac{1}{2}U_{n+1}+3$

(و هذا بالتعويض عن قيمة $\frac{1}{2}U_n$ من فرضية التراجع $U_{n+1}=\frac{1}{2}U_n+3$ حيث $\frac{1}{2}U_n=U_{n+1}-3$)

نتيجة : من *) و **) ينتج أن $U_{n+1}=\frac{1}{2}U_n+3$ من أجل كل عدد طبيعي n

جـ) تمثيل الحدود U_0 ، U_1 ، U_2 ، U_3 و U_4 على محور الفواصل



التخمين :
من التمثيل نلاحظ أن المتتالية متزايدة تماما و متقاربة نحو العدد 6

2) نعتبر المتتالية (V_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $V_n=U_n-6$

أ) **إثبات أن (V_n) متتالية هندسية مع تعيين أساسها و حدها الأول**

لدينا $V_{n+1}=U_{n+1}-6$

أي $V_{n+1}=\frac{1}{2}U_n+3-6$

أي $V_{n+1}=\frac{1}{2}U_n-3$

أي $V_{n+1}=\frac{1}{2}(U_n-6)$ أي $V_{n+1}=\frac{1}{2}V_n$

أي (V_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول $V_0=U_0-6=-6$

ب) عبارة V_n بدلالة n لدينا $V_n=-6\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$ و $U_n=6-6\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

ت) $\lim_{n\to\infty}U_n=\lim_{n\to\infty}\left[6-6\times\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]=6$ لأن $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ أي المتتالية (U_n) مقاربة نحو 6 كما هو موضح في الشكل

التمرين الثاني: الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

A(2 ;1 ;3) ، B(-3 ;-1 ;7) و C(3 ;2 ;4) ثلاث نقط من الفضاء

1) **إثبات أن النقط A ، B و C ليست في إستقامية** لدينا $\overrightarrow{AB}(-5\,,-2\,,4)$ و $\overrightarrow{AC}(1\,,1\,,1)$ إذن $\frac{4}{1}\neq\frac{-2}{1}\neq\frac{-5}{1}$ و

بالتالي الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا و منه النقط A ، B و C ليست في إستقامية

2) المستقيم (d) المعرف بالتمثيل الوسيطي التالي $t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}x=-7+2t\\y=-3t\\z=4+t\end{cases}$ حيث $\vec{U}_d(2,-3,1)$ شعاع توجه له

إثبات أن المستقيم (d) عمودي على المستوي (ABC)

لدينا $\vec{U}_d.\overrightarrow{AB}=-10+6+4=0$ و $\vec{U}_d.\overrightarrow{AC}=2-3+1=0$ و منه المستقيم (d) **عمودي على المستوي** (ABC)

كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) و هي من الشكل $2x-3y+z+d=0$

و بما أن A(2 ;1 ;3) **تنتمي إلى المستوي فإن** d = -4 **و بالتالي** $(ABC): 2x-3y+z-4=0$

3) **نسمي** H النقطة المشتركة بين المستقيم (d) **و المستوي** (ABC)

لتعيين إحداثياتها **نحل الجملة** $t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}\begin{cases}x=-7+2t\\y=-3t\\z=4+t\end{cases}\\2x-3y+z-4=0\end{cases}$ **أي** $\begin{cases}\begin{cases}x=-7+2t\\y=-3t\\z=4+t\end{cases}\\2(-7+2t)-3(-3t)+(4+t)-4=0\end{cases}$ **أي** $\begin{cases}\begin{cases}x=-7+2t\\y=-3t\\z=4+t\end{cases}\\t=1\end{cases}$

وبالتعويض عن قيمة t **نجد** H (-5 , -3 , 5)

أ) **إثبات أن النقطة H هي مرجح الجملة** $\{(A;-2)\ ,\ (B;-1)\ ,\ (C;2)\}$

$$x_H=\frac{-2\times2-1\times(-3)+2\times3}{-1}=-5\ ,\ y_H=\frac{-2\times1-1\times(-1)+2\times2}{-1}=-3\ \text{و}\ x_H=\frac{-2\times3-1\times7+2\times4}{-1}=5$$

إذن H هي مرجح الجملة $\{(A;-2)\ ,\ (B;-1)\ ,\ (C;2)\}$

ب) **طبيعة** (Γ_1) **مجموعة النقط M من الفضاء حيث** $\left(-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right).\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)=0$

$\left(-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right).\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)=0$ **معناه** $-\overrightarrow{MH}\ .\ \overrightarrow{CB}=0$ **معناه** $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{CB}=0$ و هي مجموعة نقط المستوي العمودي **على** (BC) **و المار بالنقطة** H حيث 6x + 3y -3z +54 = 0 معادلة ديكارتية له .

جـ) **طبيعة** (Γ_2) **مجموعة النقط M من الفضاء حيث** $\left\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{29}$

$\left\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{29}$ **معناه** $\left\|-\overrightarrow{MH}\right\|=\sqrt{29}$ **معناه** $HM=\sqrt{29}$ و هي مجموعة نقط سطح الكرة ذات المركز H **و** **نصف القطر** $\sqrt{29}$ حيث $(x+5)^2+(y+3)^2+(z-5)^2=29$ **أو** $x^2+y^2+z^2+10x+6y-10z+30=0$ معادلة لها

حساب المسافة بين الركز H (-5 , -3 , 5) **و المستوي ذو المعادلة** $6x+3y-3z+54=0$ **و لتكن** d

$$d=\frac{|6\times(-5)+3\times(-3)-3\times5+54|}{\sqrt{6^2+3^2+(-3)^2}}=\frac{|-30-9-15+54|}{\sqrt{6^2+3^2+(-3)^2}}=0$$

أي تقاطع المجموعتين (Γ_1) **و** (Γ_2) هو دائرة مركزها H و نصف قطرها $\sqrt{29}$

التمرين الثالث: **المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس** $(O,\vec{i},\vec{j})$

نعتبر كثير الحدود p(z) للمتغير المركب z حيث $p(z)=z^3-2z^2+16$

1. أ) **تعيين الأعداد الحقيقية a و b حيث** $p(z)=(z+2)(z^2+az+b)$

بإستعمال مثلا طريقة هورنر نجد a = -4 **و** b = 8

	-2		
1	-2	0	16
	-2	8	-16
1	-4	8	0

إذن $p(z)=(z+2)(z^2-4z+8)$

ت) **حل في** $\mathbb{C}$ **المعادلة** p(z) = 0

P(z) = 0 يكافئ z = - 2 **أو** $z^2-4z+8=0$

$\Delta=16-32=-16=16i^2$ و منه إما $z=2-2i$ **أو** $z=2+2i$

2. نعتبر النقطتين A و B **ذات اللا حقتين** $z_A=2-2i$ **و** $z_B=2+2i$

أ) **كتابة كل من z_A و z_B على الشكل المثلثي ثم الأسي** : لدينا $z_A=2-2i=2\sqrt2\left(\frac{\sqrt2}{2}-\frac{\sqrt2}{2}i\right)=\left[2\sqrt2,-\frac{\pi}{4}\right]=2\sqrt2e^{-i\frac{\pi}{4}}$

و $z_B=2+2i=2\sqrt2\left(\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}i\right)=\left[2\sqrt2,\frac{\pi}{4}\right]=2\sqrt2e^{i\frac{\pi}{4}}$

ب) $AB=4;OB=2\sqrt2;OA=2\sqrt2$ **مع** $OA^2+OB^2=8+8=16=AB^2$ **أي المثلث** ABC **قائم في** O **و متساوي الساقين** .

3. **نسمي** (T) التحويل النقطي من المستوي في نفسه الذي يرفق بكل نقطة M **ذات اللاحقة** Z ، **النقطة** M’ **ذات اللاحقة** Z’ حيث

$$Z'=e^{i\frac{\pi}{3}}Z$$

أ) التحويل (T) هو دوران مركزه O و زاوته $\frac{\pi}{3}$

ب) **الشكل المثلثي ثم الشكل الجبري للاحقة** A' صورة A بالتحويل (T) لدينا من جهة

$$Z_{A'} = e^{i\frac{\circledR}{3}} \times \left(2\sqrt{2}\right)e^{-i\frac{\circledR}{4}} = \left(2\sqrt{2}\right)e^{i\left(\frac{\circledR}{3}-\frac{\circledR}{4}\right)} = \left(2\sqrt{2}\right)e^{i\frac{\circledR}{12}} = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\circledR}{12}+i\sin\frac{\circledR}{12}\right)$$

و من جهة أخرى $Z_{A'} = \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\times Z_A = \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\times\left(2-2i\right) = (1+\sqrt{3}i)(1-i) = (1+\sqrt{3})+i(-1+\sqrt{3})$

ت) **إستنتاج القيمة المضبوطة لكل من** $\cos\frac{\circledR}{12}$ **و** $\sin\frac{\circledR}{12}$

بالمطابقة بين الشكل المثلثي و الجبري نجد ما يلي : $\sin\frac{\circledR}{12} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$; $\cos\frac{\circledR}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

التمرين الرابع: I- نعتبر الدالة g المعرفة على ℝ بـ : $g(x) = 2e^x - x - 2$

1. **دراسة تغيرات الدالة g** :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}(2e^x - x - 2) = \lim_{x\to+\infty} x\left(2\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{2}{x}\right) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$$

- الدالة g قابلة للإشتقاق على ℝ و لدينا $g'(x) = 2e^x - 1$
- $g'(x) = 0$ يكافئ $2e^x = 1$ يكافئ $e^x = \frac{1}{2}$ يكافئ $x = -\ln(2)$
- $g'(x) > 0$ يكافئ $x > -\ln(2)$
- $g'(x) < 0$ يكافئ $x < -\ln(2)$

x	$-\infty$		$-\ln(2)$		$+\infty$
g'(x)		$-$	0	$+$	
g(x)	$+\infty$	↘	$-1+\ln(2)$	↗	$+\infty$

2. إثبات أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل معدوم لدينا $g(0) = 2e^0 - 0 - 2 = 2*1 - 2 = 0$

إثبات أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد $\sim$; $-1{,}6 < \sim < -1{,}5$

الدالة g مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]-\infty\,,-\ln(2)]$ و تأخذ قيمها في المجال $[-1\,,+\infty[$

إذن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد $\sim$ و لدينا $g(-1.5) \simeq -5.37\times10^{-2}$; $g(-1.6) \simeq 3.79\times10^{-3}$ إذن $-1{,}6 < \sim < -1{,}5$

3. **إشارة $g(x)$**

- من أجل $x \in]-\infty\,,\sim] \cup [0\,,+\infty[$: $g(x) > 0$
- من أجل $x \in [\sim\,,0]$: $g(x) < 0$

II – نعتبر الدالة f المعرفة على ℝ بـ : $f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$

1. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[e^{2x} - (x+1)e^x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left(e^{2x} - xe^x - e^x\right) = 0$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[e^{2x}\left(1 + \frac{x+1}{e^x}\right)\right] = +\infty$

المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب و هو حامل محور الفواصل

2. الدالة f قابلة للإشتقاق على ℝ و لدينا $f'(x) = 2e^{2x} - (x+1)e^x - e^x = e^x(2e^x - x - 1 - 1) = e^x(2e^x - x - 2)$

أي إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

3. إثبات أن $f(\sim) = -\frac{\sim^2 + 2\sim}{4}$

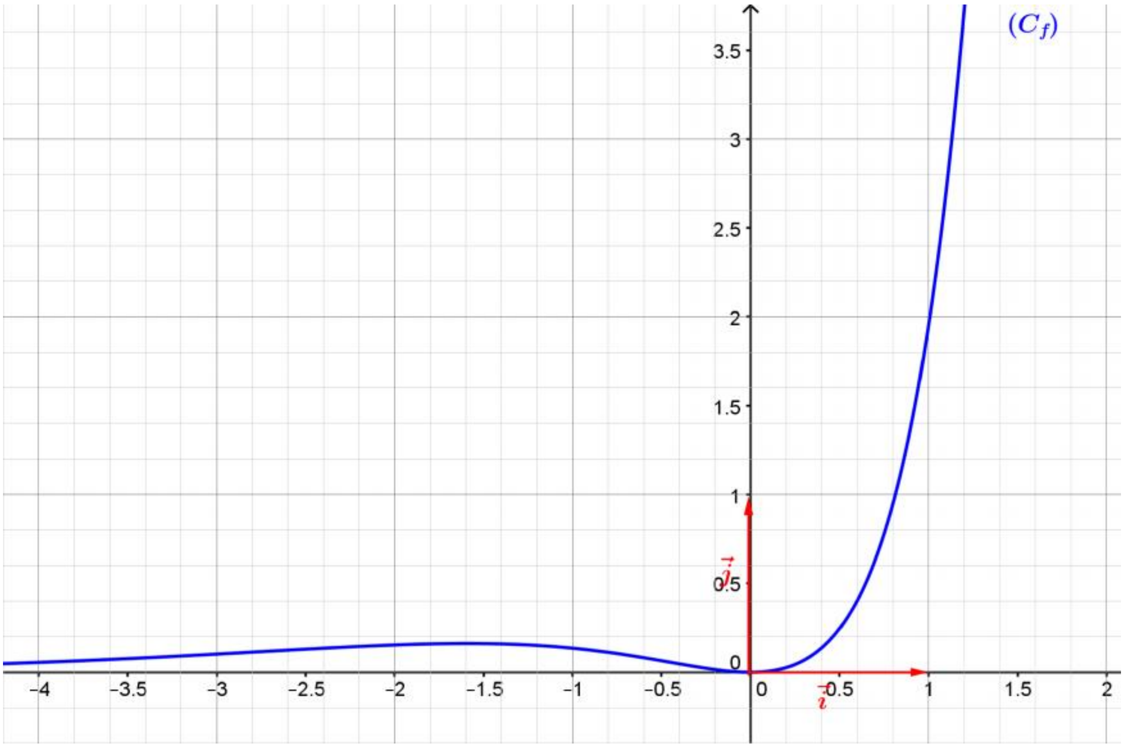
لدينا $g(\sim) = 0$ معناه $e^{\sim} = 1 + \frac{\sim}{2}$ و بالتعويض في عبارة $f(\sim)$ نجد $f(\sim) = -\frac{\sim^2 + 2\sim}{4}$

إستنتاج حصر لـ $f(\sim)$: بما أن $-1{,}6 < \sim < -1{,}5$ فإن $0.11 < f(\sim) < 0.24$

4. جدول التغيرات

x	$-\infty$		$\sim$		0		$+\infty$
f'(x)		$+$	0	$-$	0	$-$	
f(x)	0	↗	$-\frac{\sim^2+2\sim}{4}$	↘	0	↗	$+\infty$

5. تمثيل المنحنى (C_f)



6. أ) **حسب** $\int_0^2 xe^x dx$ **بإستعمال التكامل بالتجزئة :**

نضع $\begin{cases} u(x)=x \\ v'(x)=e^x \end{cases}$ و منه $\begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=e^x \end{cases}$ إذن

$$\int_0^2 xe^x dx=\left[xe^x\right]_0^2-\int_0^2 e^x dx=\left[(x-1)e^x\right]_0^2=(2-1)e^2-(0-1)e^0=e^2+1$$

ب) حساب بالسنتيمتر المربع مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها $y=0$ ، $x=0$ و $x=2$

$$A=\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2\left[e^{2x}-(x+1)e^x\right]dx=\int_0^2 e^{2x}dx-\int_0^2 xe^x dx-\int_0^2 e^x dx$$

و لتكن A

$$=\frac{1}{2}\times\int_0^2 2e^{2x}dx-(e^2+1)-\left[e^x\right]_0^2=\frac{1}{2}\left[e^{2x}\right]_0^2-e^2-\cancel{1}-e^2+\cancel{e^0}$$

$$=\frac{1}{2}(e^4-e^0)-2e^2=\frac{1}{2}e^4-\frac{1}{2}-2e^2\simeq 27,3-0,5-2\times 7,39\simeq 12,02\ u.a$$

و بالسنتيمتر المربع نجد $A\simeq 12,02\times 4\simeq 48,08\,cm^2$