تصحيح الموضوع الثاني

التمرين الاول :

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0,+\infty[$ بـ : $f(x)=\ln(x^2+4)$

الجزء أ)

1) دراسة تغيرات الدالة f على المجال $[0,+\infty[$ لدينا $f(0)=\ln 4=2\ln 2$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ولدينا $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+4}$

من اجل $x\in[0,+\infty[$ ، $f'(x)>0$ ومنه f متزايدة تماما على هذا المجال

جدول التغيرات

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$2\ln 2$ ↗	$+\infty$

2) نعتبر الدالة g والمعرفة على $[0,+\infty[$ بـ : $g(x)=f(x)-x$

أ) دراسة تغيرات الدالة g

$g(0)=f(0)=-0=2\ln 2$, $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(\underbrace{\dfrac{\ln(x^2+4)}{x}}_{0}-1\right)=-\infty$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ولديها: $g'(x)=f'(x)-1=\dfrac{2x}{x^2+4}-1=\dfrac{-x^2+2x-4}{x^2+4}$

لشارة $g'(x)$ من لشارة $(-x^2+2x-4)$ و هو سالب لان $\Delta=-12$

x	0	~	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$2\ln 2$ ↘		$-\infty$

ب) اثبات ان المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد ~ من المجال $[2\ ,\ 3]$

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[0,+\infty[$

وتأخذ قيمها في المجال $]-\infty\ ,\ 2\ln 2]$ اذن المعادلة

$g(x)=0$ تقبل حل وحيد ~ ولدينا $g(2)\simeq 0.08$, $g(3)\simeq -0.44$

أي $g(x)=0$ تقبل حل وحيد من المجال $[2\ ,\ 3]$

باستعمال قاعدة التنصيف

2 2.5 3

لدينا $g(2,5)=\ln\left((2.5)^2+4\right)-2,5\ \simeq -0,17$ اذن $g(2)\times g(2,5)<0$ ومنه $2.0<\sim<2.5$

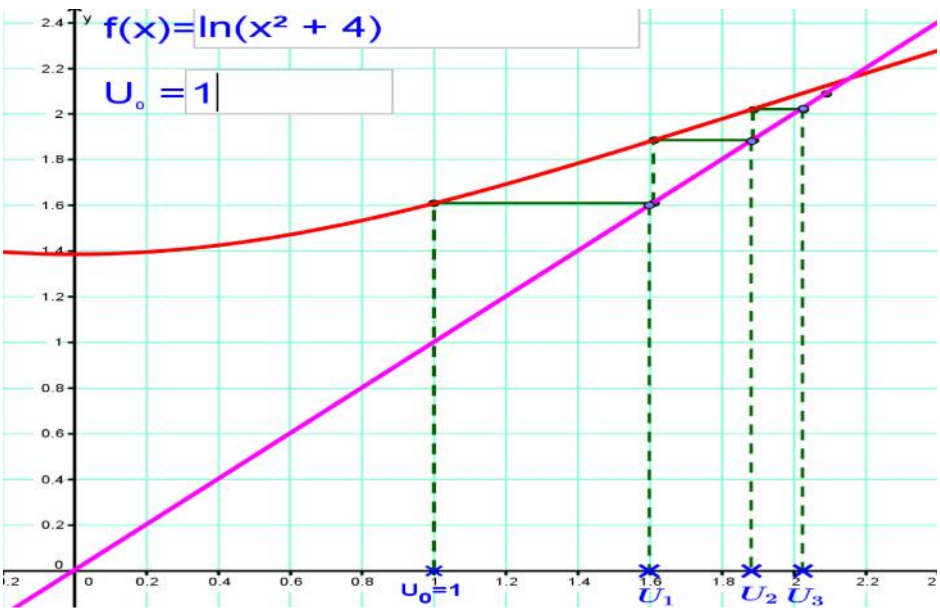
جـ) تبرير وجود عدد حقيقي ~ وحيد حل للمعادلة $f(x)=x$

$f(x)=x$ معناه $f(x)-x=0$ معناه $g(x)=0$ معناه $g(\sim)=0$ حيث $2.0<\sim<2.5$

الجزء ب)

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة بـ: $U_0=1$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1}=f(U_n)$

1) التمثيل على محور الفواصل الحدود $U_0\ ,\ U_1\ ,\ U_2\ ,\ U_3$



2) تعليم النقطة I ذات الفاصلة $\sim \simeq 2,2$

3) أ) **البرهان بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n :** $1 \le U_n \le \sim$

نسمي P(n) هذه الخاصية

*) نتحقق من صحة P(0) لدينا : $U_0 = 1$ و $1 \le 1 \le \sim$ أي P(0) صحيحة .

**) نفرض ان P(n) صحيحة أي $1 \le U_n \le \sim$ فرضية التراجع و نبرهن صحة P(n+1) أي $1 \le U_{n+1} \le \sim$؟

لدينا $1 \le U_n \le \sim$ ومنه $f(1) \le f(U_n) \le f(x)$ ومنه $\ln 5 \le U_{n+1} \le \sim$ ومنه $1 \le U_{n+1} \le \sim$

لان $g(\sim) = 0$ معناه $f(\sim) - \sim = 0$ أي $f(\sim) = \sim$ و $U_{n+1} \ge \ln 5$ و $\ln 5 \ge 1$ ومنه $U_{n+1} \ge 1$

اذن $1 \le U_{n+1} \le \sim$ أي P(n+1) صحيحة .

نتيجة : من * و ** وحسب مبدا الاستدلال بالتراجع فان $1 \le U_n \le \sim$ من اجل أي عدد طبيعي n .

ت) **اثبات ان (U_n) مقاربة**

اتجاه تغير المتتالية (U_n) ندرس اشارة $U_{n+1} - U_n$ لدينا $U_{n+1} - U = f(U_n) - U_n = g(U_n)$

علما ان $g(U_n) > 0$ لان $1 < U_n < \sim$ من جدول تغيرات الدالة

أي (U_n) متتالية متزايدة تماما ومحدود من الاعلى فهي متقاربة

تعين نهاية المتتالية (U_n) لدينا $\lim U_n = \lim U_{n+1} = l$ أي $U_{n+1} = f(U_n)$ ومنه $l = f(l)$

ومنه $f(l) - l = 0$ ومنه $g(l) = 0$ ومنه $l = \sim$ اذن $\lim U_n = \sim$

التمرين الثاني

المستوي المركب منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{u}, \vec{v})$

1) **حل في $(\mathbb{C})$ المعادلة ذات المجهول المركب** $(z - 2i)(z^2 - 2z + 2) = 0 \longleftarrow (*)$

(*) يكافئ $z = 2i$ او $z^2 - 2z + 2 = 0$ $\qquad \Delta = -4 = 4i^2$

$z = \dfrac{2 + 2i}{2} = 1 + i$ أو $z = 1 - i$

$$z = 2i = 2e^{i\frac{®}{2}} \quad , \quad z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{®}{4}} \quad , \quad z = 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{®}{4}}$$

2) نعتبر النقطتين $A(z_A = 1 + i)$, $B(z_B = 2i)$ من اجل كل عدد مركب $z \ne z_A$ لدينا $z' = \dfrac{z - 2i}{z - (1 + i)}$

أ) نعتبر(E) مجموع النقط M(x,y) ذات اللاحقة z بحيث z' تخيلي صرف

* اثبات ان $B \in (E)$

لدينا $\dfrac{z_B - 2i}{z_B - (1 + i)} = \dfrac{2i - 2i}{2i - (1 + i)} = 0$ و هو تخيلي صرف اذن $B \in (E)$

تعيين مجموعة النقط (E)

كتابة z’ على الشكل الجبري بعد الحساب نجد : $z' = \dfrac{x^2 + y^2 - x - 3y + 2}{(x - 1)^2 + (y - 1)^2} - \dfrac{3x + y - 2}{(x - 1)^2 + (y - 1)^2}i$

z’ تخيلي صرف معناه $x^2+y^2-x-3y+2=0$ معناه $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

أي (E) هي دائرة مركزها $\mu\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ ونصف قطرها $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

ب) نعتبر (F)مجموع النقط ذات اللاحقة z حيث $|z'| = 1$

تعين المجموعة (F)

لدينا $|z'| = 1$ معناه $\left|\dfrac{z - 2i}{z - (1 + i)}\right| = 1$ معناه $\begin{cases} |z - 2i| = |z - (1 + i)| \\ z \ne z_A \end{cases}$

نضع $z = x + iy$ اذن

$|z - 2i| = |z - (1 + i)|$ معناه $x^2+(y-2)^2=(x-1)^2+(y-1)^2$ و $(x, y) \ne (1,1)$

معناه $2x-2y+2=0$ معناه $x-y+1=0$ و هي معادلة لمستقيم

التمرين الثالث : الفضاء منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقط $A(1,2,2)$ $B(3,2,1)$ و $C(1,3,3)$

1) **اثبات ان النقط A ، B و C تعين مستويا** لدينا $\overrightarrow{AB}(2,0,-1)$ و $\overrightarrow{AC}(0,1,1)$

لدينا $\frac{1}{-1} \neq \frac{0}{2}$ ومنه $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا ومنه A ، B و C تشكل مستوي حيث $\vec{n}\left(a,b,c\right)$ **شعاع ناظمي له**

لدينا $\begin{cases}\vec{n}\,.\,\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}\,.\,\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$ معناه $\begin{cases}2a-c=0\\ b+c=0\end{cases}$ معناه $\begin{cases}2a=c\\ b=-c\end{cases}$

نضع C=2 اذن a=1 و b= -2 ومنه $\vec{n}\left(1,-2,2\right)$ ومنه $x\text{-}2y\text{+}2z\text{+}d\text{=}0$

$A\in\left(ABC\right)$ اذن $1\text{-}4\text{+}4\text{+}d\text{=}0$ أي $d\text{=-}1$ اذن $x - 2y + 2z - 1 = 0$ هي معادلة ديكارتية لـ (ABC)

2) نعتبر المستويين $(P_1) : x\text{-}2y\text{+}2z\text{-}1\text{=}0$ و $(P_2) : x\text{-}3y\text{+}2z\text{+}2\text{=}0$

أ) اثبات ان (P_1) و (P_2) متقاطعين وفق مستقيم $\left(\Delta\right)$

لدينا $\vec{n_1}\left(1,-2,2\right)$ و $\vec{n_2}\left(1,-3,2\right)$ شعاعين ناظمين لـ (P_1) و (P_2) على الترتيب

مع $\frac{3}{2}\neq\frac{1}{1}$ ومنه $\vec{n_1}$; $\vec{n_2}$ غير مرتبطين خطيا اذن ان (P_1) و (P_2) يتقاطعان وفق مستقيم $\left(\Delta\right)$

ب) **اثبات النقطة C تنتمي الى المستقيم** $\left(\Delta\right)$

لدينا $1-2\times3+2\times3-1=1-6+6-1=0$ أي $C\in\left(P_1\right)$

ولدينا $1-3\times3+2\times3+2=9-9=0$ أي $C\in\left(P_2\right)$

بما ان $C\in\left(P_1\right)$ و $C\in\left(P_2\right)$ فان $C\in\left(P_1\right)\cap\left(P_2\right)$ أي $C\in\left(\Delta\right)$

جـ) **اثبات ان الشعاع** $\vec{U}\left(2,0,-1\right)$ **شعاع توجيه للمستقيم** $\left(\Delta\right)$

لدينا $\vec{U}\,.\,\vec{n_2}=2\times1-0\times(-3)-1\times2=0$ أي $\vec{U}$ و $\vec{n_2}$ متعامدين

و $\vec{U}-\vec{n_1}=2\times1-0\times(-2)-1\times2=0$ أي $\vec{U}$ و $\vec{n_1}$ متعامدين ومنه $\vec{U}\left(2,0,-1\right)$ شعاع توجيه لـ $\left(\Delta\right)$

3) $\left(\Delta\right)$ المستقيم ذو التمثيل الوسيطي $k\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}x=2k+1\\ y=3\\ z=-k+3\end{cases}$

أ) **تعيين قيمة العدد الحقيقي k بحيث يكون** $\overrightarrow{AM}$ **و** $\vec{U}$ **متعامدين** $\overrightarrow{AM}\left(x-1\,,\,y-2\,,\,z-2\right)$ و $\vec{U}\left(2,0,-1\right)$

$\overrightarrow{AM}$ و $\vec{U}$ متعامدين معناه $\overrightarrow{AM}\,.\,\vec{U}=0$ معناه $2(x-1)-1(z-2)=0$ معناه $2(2k+1-1)-(-k+3-2)=0$

معناه $4k+k-1=0$ معناه $k=\frac{1}{5}$

ب) **استنتاج المسافة بين النقطة A و المستقيم** $\left(\Delta\right)$ وهي المسافة بين النقطة $A(1,2,2)$ و النقطة ذات إحداثيات $\left(\frac{7}{5},3,\frac{14}{5}\right)$

أي $d\left(A,D\right)=\sqrt{\left(\frac{7}{5}-1\right)^2+\left(3-2\right)^2+\left(\frac{14}{5}-2\right)^2}=\frac{\sqrt{4+25+16}}{5}=\frac{\sqrt{45}}{5}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$

التمرين الرابع :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f\left(x\right)=x+\ln4+\frac{2}{e^x+1}$

1) $\lim_{x\to-\infty}f\left(x\right)=-\infty$, $\lim_{x\to+\infty}f\left(x\right)=+\infty$

2) من اجل كل عدد حقيقي x لدينا $f\left(x\right)+f\left(-x\right)=x+\ln4+\frac{2}{e^x+1}-x+\ln4+\frac{2}{e^{-x}+1}=2\ln4+2=2(1+\ln4)$

ومنه نستنتج ان النقطة $A\left(0,1+\ln4\right)$ مركز تناظر للمنحنى (C)

3) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $f'\left(x\right)=1-\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2}$

و هو عدد موجب من اجل أي عدد حقيقي x أي f دالة متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

جدول التغيرات

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

4) أ) **اثبات ان المعادلة** ***f(x)=3*** **تقبل حل وحيد** $\sim$ حيث
$1{,}1 < \sim < 1{,}2$

بما ان الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فالمعادلة $f(x)=3$ تقبل حل وحيد $\sim$ ولدينا $f(1{,}1)=2{,}99$ ، $f(1{,}2)=3{,}05$ و

$f(1{,}1) < 3 < f(1{,}2)$ ومنه $1{,}1 < \sim < 1{,}2$

ت) **تعيين قيمة العدد m حتى يكون** $(-\sim)$ **حلا للمعادلة f(x)=m**

لدينا $f(\sim)+f(-\sim)=2+2\ln 4$ ومنه $3+m=2+2\ln 4$

ومنه $m=-1+2\ln 4$

5) أ) **اثبات انه من اجل أي عدد حقيقي x:** $f(x)=x+2+\ln 4-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$

لدينا $f(x)=x+\ln 4+\dfrac{2e^x+2-2e^x}{e^x+1}=x+2+\ln 4-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$

ت) **اثبات ان المستقيم** (Δ) **ذو المعادلة** $y=x+\ln 4$ **مقارب مائل** .

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{e^x+1}\right)=0$ أي $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+\ln 4)\right]=0$ أي (Δ) مقارب مائل لـ (C) من جهة $+\infty$

و اثبات ان المستقيم ذو المعادلة $y=x+2+\ln 4$ مقارب مائل

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{2e^x}{e^x+1}\right)=0$ أي $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+2+\ln 4)\right]=0$ أي (Δ) مقارب لـ (C) من جهة $-\infty$

دراسة وضعية (C) بالنسبة لـ (Δ) ندرس إشارة $\left[f(x)-(x+\ln 4)\right]$

أي لشارة $\left(\dfrac{2}{e^x+1}\right)$ و هو موجب دوما إذن (C) يقع فوق (Δ)

6) أ) **التكامل** $I(ª)=\displaystyle\int_0^{ª}\left[f(x)-x-\ln 4\right]dx$

يمثل مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و المستقيم المقارب (Δ) و المستقيمات التي معادلتها $x=0$ و $x=ª$ $(ª>0)$

ب)

$$I(ª)=\int_0^{ª}\left[f(x)-x-\ln 4\right]dx=\int_0^{ª}\left[2-\frac{2e^x}{e^x+1}\right]dx=\left[2x-2\ln(e^x+1)\right]_0^{ª}=\left[2ª-2\ln\left(e^{ª}+1\right)\right]-\left[-2\ln 2\right]$$

$$=2ª+2\ln 2-2\ln\left(e^{ª}+1\right)=2ª+2\ln\frac{2}{e^{ª}+1}=2\left(ª+\ln\frac{2}{e^{ª}+1}\right)=2\left[\ln e^{ª}+\ln\frac{2}{e^{ª}+1}\right]=2\ln\left(\frac{2e^{ª}}{e^{ª}+1}\right)$$

جـ) **تعيين قيمة** $ª$ **بحيث يكون** $I(ª)=1$

$I(ª)=1$ معناه $2\ln\left(\dfrac{2e^{ª}}{e^{ª}+1}\right)=1$ معناه $\ln\left(\dfrac{2e^{ª}}{e^{ª}+1}\right)=\dfrac{1}{2}$ معناه $\dfrac{2e^{ª}}{e^{ª}+1}=e^{\frac{1}{2}}$

معناه $2e^{ª}=e^{ª}\times e^{\frac{1}{2}}+e^{\frac{1}{2}}$ معناه $2e^{ª}=e^{ª}\times e^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}$

معناه $e^{ª}\left(2-\sqrt{e}\right)=\sqrt{e}$ معناه $e^{ª}=\dfrac{\sqrt{e}}{2-\sqrt{e}}$ معناه $ª=\ln\left(\dfrac{\sqrt{e}}{2-\sqrt{e}}\right)$ أي $ª\simeq 1{,}5$

و بالتوفيق في البكالوريا إن شاء الله