تصحيح البكالوريا التجريبي في مادة الرياضيات ماي 2014

[Sous-titre du document]

تصحيح الموضوع الأول

من إنجاز الأستاذ : ثابت إبراهيم

16/05/2014

تصحيح البكالوريا التجريبي ماي 2014 الشعبة : رياضيات

الإجابة	العلامة
الموضوع الأول	
التمرين الأول	**04**
لدينا : $N=\overline{abcca}^{5}$ و $N=\overline{bbab}^{8}$ 1) تبيان أنَ N يحقق : $309a+15c=226b$ • لدينا : $N=a\times5^4+b\times5^3+c\times5^2+c\times5+a\times5^0=625a+125b+25c+5c+a$ أي $N=626a+125b+30c$ • ولدينا : $N=b\times8^3+b\times8^2+a\times8+b\times8^0=512b+64b+8a+b$ أي $N=577b+8a$ • **إذن :** $626a+125b+30c=577b+8a$ اي $618a+30c=452b$ ومنه $309a+15c=226b$	01
2) تبيان أن العدد 3 قاسم للعدد b: • لدينا : $3(103a+5c)=226b$ - لدينا : $3/226b$ و $3\wedge226=1$ ومنه $3/b$ حسب مبرهنة غوص .	0.25
3) نفرض $b=3$. أ) تبيان أن : $309(a-2)=60-15c$ • لدينا : $3(103a+5c)=226b$ ومنه $309a+15c=678$ • ولدينا : $309a-618=60-15c$ ومنه $309(a-2)=60-15c$	0.75
ب) استنتاج أن العدد 5 يقسم العدد $a-2$: • لدينا : $309(a-2)=5(12-3c)$ $5/309(a-2)$ و $5\wedge309=1$ ومنه $5/(a-2)$ حسب مبرهنة غوص . • استنتاج قيمة a : بما أن $5/(a-2)$ فان : $a-2=5k\,(k\in\mathbb{N})$ ولدينا : $a<5$ أي أنَ : $a=2$. • استنتاج قيمة العدد c: لدينا : $309\times2+15c=678$ ومنه $15c=678-618$ أي $c=4$	2×0.75
ج) كتابة العدد N في نظام التعداد 10: $N=577(3)+8(2)=1747$	0.5
✍ **التمرين الثاني**	04نقاط
• لدينا : $z'=\dfrac{iz+i+1}{z+2}$ من أجل $z\neq-2$ **1- أ) التحقق من أنَ :** $z'=\dfrac{i(z+1-i)}{z+2}$ • لدينا : $z'=\dfrac{iz+i+1}{z+2}=\dfrac{i\left(z+\frac{i}{i}+\frac{1}{i}\right)}{z+2}=\dfrac{i(z+1-i)}{z+2}$	0.25

0.5	**ب) تبيان أنه إذا كانت M تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$ فان M' تنتمي الى دائرة $(\mathcal{C})$:** • لدينا : M تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$ معناه $AM=BM$ • ولدينا : $\|z'\|=\left\|\dfrac{i(z+1-i)}{z+2}\right\|=\dfrac{\|i\|\times\|z+1-i\|}{\|z+2\|}$ أي $OM'=\dfrac{BM}{AM}=1$ • إذن $OM'=1$ ومنه M' تنتمي إلى دائرة $(\mathcal{C})$ مركزها $O(0;0)$ ونصف قطرها $R=1$
0.5	ج) **تعيين طبيعة المجموعة (E) بحيث يكون z' تخيليا صرفا :** • z' تخيلي صرف معناه $Arg(z')=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ • ومنه $Arg\left(\dfrac{i(z+1-i)}{z+2}\right)=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ أي $Arg(i)+Arg\left(\dfrac{z+1-i}{z+2}\right)=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ معناه : $\dfrac{\pi}{2}+Arg\left(\dfrac{z+1-i}{z+2}\right)=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ ومنه $Arg\left(\dfrac{z+1-i}{z+2}\right)=k\pi$ أي $(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM})=k\pi$ • المجموعة (E) هي المستقيم (AB) ماعدا النقطتين A و B. $(E)=(AB)-\{A,B\}$
0.25	**2- أ) التحقق من أنّ : $z'-i=\dfrac{1-i}{z+2}$** • لدينا : $\dfrac{1-i}{z+2}=\dfrac{iz+i+1-iz-2i}{z+2}=z'-i=\dfrac{iz+i+1}{z+2}-i$ أي $z'-i=\dfrac{1-i}{z+2}$
0.25	**ب) استنتاج أنّ : $IM'\times AM=\sqrt{2}$:** • لدينا : $z'-i=\dfrac{1-i}{z+2}$ ومنه $\|z'-i\|=\left\|\dfrac{1-i}{z+2}\right\|$ أي $\|z'-i\|=\dfrac{\|1-i\|}{\|z+2\|}$ وبالتالي : $IM'=\dfrac{\sqrt{2}}{AM}$ ومنه $IM'\times AM=\sqrt{2}$
0.5	• **استنتاج أنّ : $(\vec{u},\overrightarrow{IM'})+(\vec{u},\overrightarrow{AM})=-\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$** لدينا : $z'-i=\dfrac{1-i}{z+2}$ ومنه $Arg(z'-i)=Arg\left(\dfrac{1-i}{z+2}\right)$ أي $Arg(z'-i)=Arg(1-i)-Arg(z+2)$ ومنه $Arg(z'-i)+Arg(z+2)=-\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$ اي $(\vec{u},\overrightarrow{IM'})+(\vec{u},\overrightarrow{AM})=-\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$
0.5	**ج) تبيان أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى الدائرة (Γ) ذات المركز A ونصف القطر 1 فان النقطة M' تنتمي إلى مجموعة يطلب تعيينها :** • لدينا : M تنتمي إلى الدائرة (Γ) ذات المركز A ونصف القطر 1 معناه $AM=1$ • ولدينا : $IM'\times AM=\sqrt{2}$ أي $IM'=\sqrt{2}$ ومنه M' تنتمي إلى دائرة مركزها I ونصف قطرها $R=\sqrt{2}$

3- لدينا : $z_E=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

أ) تبيان أن النقطة E تنتمي إلى المجموعة (Γ):

• **لدينا :** $AE=|z_E-z_A|=\left|-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+2\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$ ومنه $E\in(\Gamma)$

0.25

• **تبيان أن :** $(\vec{u},\overrightarrow{AE})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ **:**

لدينا : $z_{\overrightarrow{AE}}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ وبالتالي :

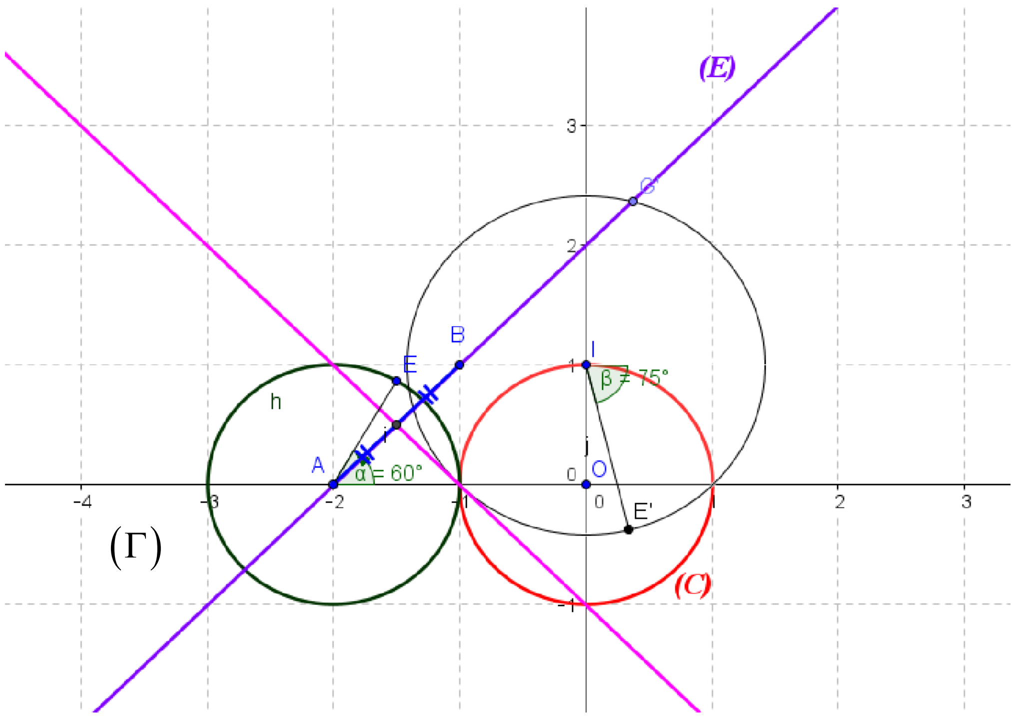
$(\vec{u},\overrightarrow{AE})=arg(z_{\overrightarrow{AE}})=Arg\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ أي $(\vec{u},\overrightarrow{AE})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

0.5

ب) انشاء النقطة E' المرفقة بالنقطة E:

لدينا : $EE'=\sqrt{2}$ ولدينا : $(\vec{u},\overrightarrow{IE'})+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{4}[2\pi]$ أي

$(\vec{u},\overrightarrow{IE'})=-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}[2\pi]$ ومنه $(\vec{u},\overrightarrow{IE'})=-\frac{7\pi}{12}[2\pi]$



0.5

التمرين الثالث — 05 نقاط

• لدينا : $u_0=\frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+1}$

1- التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$

0.25

- لدينا : $u_{n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+1}=\frac{2u_n+1-1}{2u_n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$ ومنه : $u_{n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$	
2- أ) البرهان على أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n<\frac{1}{2}$ نسمي $P(n)$ هذه الخاصية . 1- من أجل $n=0$ لدينا : $u_0=\frac{1}{5}$ و $0<\frac{1}{5}<\frac{1}{2}$ أي $0<u_0<\frac{1}{2}$ اذن $P(n)$ صحيحة من أجل $n=0$. 2- نفرض صحة $P(n)$ أي نفرض أنَ : $0<u_n<\frac{1}{2}$ ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي نبرهن أنَ : $0<u_{n+1}<\frac{1}{2}$. - لدينا : $0<u_n<\frac{1}{2}$ ومنه $0<2u_n<1$ أي $1<2u_n+1<2$ وبالتالي $\frac{1}{2}<\frac{1}{2u_n+1}<1$ إذن $-1<-\frac{1}{2u_n+1}<-\frac{1}{2}$ وأخيرا : $0<1-\frac{1}{2u_n+1}<\frac{1}{2}$ أي $0<u_{n+1}<\frac{1}{2}$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة . 3- حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فان $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.	0.75
ب) التحقق انه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$ • لدينا : $\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}=\frac{u_n-2u_n^2}{2u_n+1}=\frac{2u_n-2u_n^2-u_n}{2u_n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+1}-u_n=u_{n+1}-u_n$. • **تبيان أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة :** ندرس اشارة الفرق : $u_{n+1}-u_n$ - لدينا : $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$ ولدينا : $0<u_n<\frac{1}{2}$ ومنه $-1<-2u_n<0$ أي $0<1-2u_n<1$ وبالتالي : $0<u_n(1-2u_n)<\frac{1}{2}$ - ولدينا : $\frac{1}{2}<\frac{1}{2u_n+1}<1$ ومنه $0<\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}<\frac{1}{2}$ - أي $u_{n+1}-u_n>0$ وبالتالي المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة.	0.25 0.5
ج) **دراسة تقارب المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد $\frac{1}{2}$ فهي متقاربة وتتقارب من العدد $\frac{1}{2}$. • **تعيين نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:** $\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{1}{2}$	0.5

<table>
<tr><td>0.75</td><td>

3- لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\frac{3^n u_n}{2u_n-1}$

أ) اثبات أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية :

• لدينا : $v_{n+1}=\frac{3^{n+1}u_{n+1}}{2u_{n+1}-1}$

أي $v_{n+1}=\frac{3^{n+1}u_{n+1}}{2u_{n+1}-1}=\frac{3\times 3^n\times\frac{2u_n}{2u_n+1}}{2\times\frac{2u_n}{2u_n+1}-1}=\frac{\frac{6\times 3^n\times u_n}{2u_n+1}}{\frac{4u_n-2u_n-1}{2u_n+1}}$

$v_{n+1}=6\times\frac{3^n\times u_n}{\cancel{2u_n+1}}\times\frac{\cancel{2u_n+1}}{2u_n-1}=6\times\frac{3^n\times u_n}{2u_n-1}=6v_n$ ومنه $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية أساسها $q=6$

وحدها الأول $v_0=\frac{3^0\times u_0}{2u_0-1}=\frac{1\times\frac{1}{5}}{2\times\frac{1}{5}-1}=\frac{\frac{1}{5}}{-\frac{3}{5}}=-\frac{1}{3}$

</td></tr>
<tr><td>0.5

0.75</td><td>

ب) حساب عبارة الحد العام v_n بدلالة n :

• لدينا : $v_n=v_0\times q^n=-\frac{1}{3}\times 6^n$

• استنتاج أنَ : $u_n=\frac{2^n}{3+2^{n+1}}$

- لدينا : $v_n=\frac{3^n u_n}{2u_n-1}$ ومنه $2u_nv_n-v_n=3^nu_n$ أي $2u_nv_n-3^nu_n=v_n$

- ومنه $(2v_n-3^n)u_n=v_n$ وبالتالي : $u_n=\frac{v_n}{2v_n-3^n}$

إذن : $u_n=\frac{-\frac{1}{3}\times 6^n}{2\left(-\frac{1}{3}\times 6^n\right)-3^n}=-\frac{6^n}{-2\times 6^n-3\times 3^n}$ ومنه

$u_n==-\frac{6^n}{-2\times 6^n-3\times 3^n}=\frac{2^n\times 3^n}{2\times 3^n\times 2^n+3\times 3^n}$ أي $u_n=\frac{2^n}{2^{n+1}+3}=\frac{2^n}{3+2^{n+1}}$

</td></tr>
<tr><td>0.5</td><td>

• حساب $\lim_{n\to+\infty}u_n$: $\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{2^n}{2^{n+1}+3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n}{2^n\left(2+\frac{3}{2^n}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2+3\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\frac{1}{2}$

</td></tr>
<tr><td>07 نقاط</td><td>

التمرين الرابع

</td></tr>
<tr><td></td><td>

I. لدينا : $g(x)=\frac{e^x}{e^x+1}-ln(e^x+1)$

1) حساب النهايات :

• حساب $\lim_{x\to-\infty}g(x)$:

</td></tr>
</table>

0.25 — 0.25

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{e^x+1}-ln\left(e^x+1\right)\right)=0$$ لأنّ $$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} ln\left(e^x+1\right)=0\end{cases}$$

- **التفسير الهندسي** : $y=0$ مستقيم مقارب أفقي للمنحني $\left(C_g\right)$ بجوار $-\infty$

0.25

- **حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$:**

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{e^x+1}-ln\left(e^x+1\right)\right)=-\infty$$ لأنّ $$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} ln\left(e^x+1\right)=+\infty\end{cases}$$

0.5

2) تبيان أنّ $g'(x)=\frac{-e^{2x}}{\left(e^x+1\right)^2}$

- لدينا : $$g'(x)=\frac{e^x\left(e^x+1\right)-e^x\times e^x}{\left(e^x+1\right)^2}-\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{e^{2x}+e^x-e^{2x}-e^{2x}-e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$$

أي $$g'(x)=\frac{-e^{2x}}{\left(e^x+1\right)^2}$$

0.25

- **استنتاج اتجاه تغير الدالة g:**

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$-e^{2x}$	$-$
$g'(x)$	$-$

0.5

- **جدول التغيرات :**

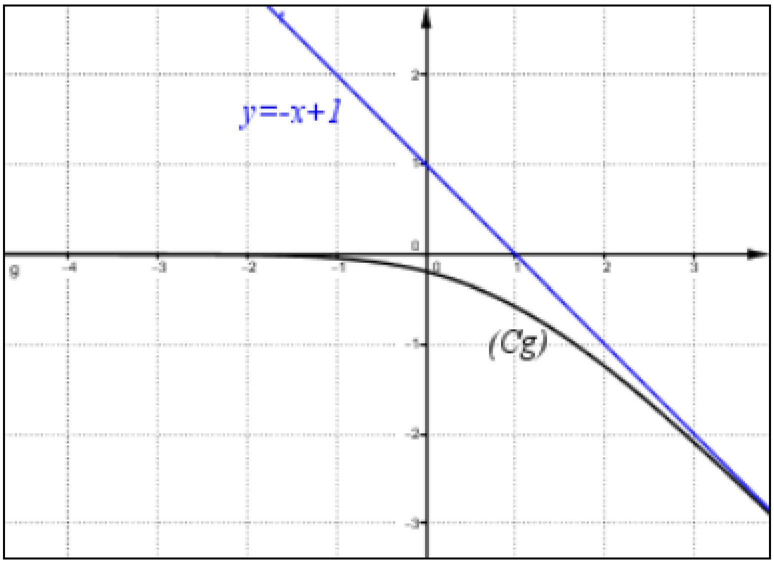
x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	0 $\searrow$ $-\infty$

0.5

3) تبيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}+ln\left(1+e^{-x}\right)-x$

- لدينا : $g(x)=\frac{e^x}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}-ln\left[e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)\right]$ ومنه :

$$g(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}-ln\left(e^x\right)-ln\left(1+e^{-x}\right)$$ أي $$g(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}+ln\left(1+e^{-x}\right)-x$$

4) أ) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-(-x+1)\right]$: • لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-(-x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{1+e^{-x}}-ln\left(1+e^{-x}\right)-x+x-1\right]$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-(-x+1)\right]=0$ لانَ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+e^{-x}}=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}ln\left(1+e^{-x}\right)=0\end{cases}$	0.5
• **تفسير النتيجة :** المستقيم ذي المعادلة $y=-x+1$ مقارب مائل للمنحني $\left(C_g\right)$ عند $-\infty$.	0.25
5) الرسم :  	0.75
6) استنتاج اشارة $g(x)$: <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ ………… $+\infty$</td></tr><tr><td>$g(x)$</td><td>$-$</td></tr></table>	0.25
.II لدينا : $f(x)=e^{-x}ln\left(1+e^{x}\right)$ **1) البرهان أنَ : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$** • نضع $e^{x}=t$ وبالتالي عندما $x\to-\infty$ فانَ : $t\to 0$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}ln\left(1+e^{x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{ln\left(e^{x}+1\right)}{e^{x}}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{ln(t+1)}{t}=1$ أي $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$	0.25
• **حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$:** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}ln\left(1+e^{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ln\left(e^{x}+1\right)}{e^{x}}=0$	0.25
2) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)=e^{-x}\times g(x)$: • لدينا : $f'(x)=-e^{-x}\times ln\left(e^{x}+1\right)+e^{-x}\times\dfrac{e^{x}}{e^{x}+1}=e^{-x}\left(\dfrac{e^{x}}{e^{x}+1}-ln\left(e^{x}+1\right)\right)$ أي $f'(x)=e^{-x}\times g(x)$	0.5

- **استنتاج اتجاه تغير الدالة f :**

اشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

x	$+\infty$ $-\infty$
$g(x)$	$-$
$f'(x)$	$-$

0.25

- **جدول تغيرات الدالة f :**

x	$+\infty$ $-\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$1 \searrow 0$

0.5

3) التحقق من أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $\dfrac{1}{e^x+1}=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

- من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $\dfrac{1}{e^x+1}=\dfrac{1}{e^x\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)}=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

0.25

- حساب $\displaystyle\int_{-ln3}^{0}\frac{1}{e^x+1}dx$:

$$\int_{-ln3}^{0}\frac{1}{e^x+1}dx=\int_{-ln3}^{0}\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx=\left[-ln\left(1+e^{-x}\right)\right]_{-ln3}^{0}=-ln2+ln\left(1+e^{ln3}\right)$$

أي $\displaystyle\int_{-ln3}^{0}\frac{1}{e^x+1}dx=-ln2+ln4=-ln2+2ln2=ln2$

0.5

4) حساب $\displaystyle\int_{-ln3}^{0}f(x)dx$: بالمكاملة بالتجزئة

$$\int_{-ln3}^{0}f(x)dx=\int_{-ln3}^{0}e^{-x}ln\left(e^x+1\right)dx$$

نضع : $u'(x)=e^{-x}$ ومنه $u(x)=-e^{-x}$

و $v(x)=ln\left(e^x+1\right)$ ومنه $v'(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$

إذن :

$$\int_{-ln3}^{0}f(x)dx=\int_{-ln3}^{0}e^{-x}ln\left(e^x+1\right)dx=\left[-e^{-x}ln\left(e^x+1\right)\right]_{-ln3}^{0}-\int_{-ln3}^{0}-e^{-x}\times\frac{e^x}{e^x+1}dx$$

أي $\displaystyle\int_{-ln3}^{0}f(x)dx=-ln2+e^{ln3}ln\left(e^{-ln3}+1\right)+\int_{-ln3}^{0}\frac{1}{e^x+1}dx$

$\displaystyle\int_{-ln3}^{0}f(x)dx=-ln2+3ln\left(\frac{1}{3}+1\right)+ln2=3ln\frac{4}{3}$ إذن $\displaystyle\int_{-ln3}^{0}f(x)dx=3ln\frac{4}{3}$

0.5

☺ مع تمنياتي لكم بالتوفيق و النجاح في البكالوريا جوان 2014❀

أستاذ المادة : ثابت إبراهيم

قائمة التلاميذ : 3 ثانوي

الشعبة : رياضيات

1) صديق إكرام

2) زيدور هاجر

3) مزوار نور الهدى

4) بوزار لقوس نجاة

5) بوزار عبابو سعاد

6) طرايش نسرين

7) واشك زهيدة

8) بوطبل حمزة

9) طهار حسينة

10) طيب مسعود حيزية

11) عقروش عمار

12) محمدي بوزينة أحمد

13) بلقاسمي عبد الرزاق

14) جلال فاطمة

15) كامل عبد الكريم