اختبار الثلاثي الأول في مادة الرياضيات

التمرين الأول (09 نقط) :

I. لكل سؤال ثلاث إجابات ، إجابة واحدة منها صحيحة ، المطلوب : تحديد الإجابة الصحيحة مع التبرير

الرقم	السؤال	الإجابة أ	الإجابة ب	الإجابة جـ
01	نهاية الدالة $f(x)=\dfrac{e^{-\sqrt{x}}-1}{x}$ عند 0 :	-1	$+\infty$	$-\infty$
02	مجموعة الحلول في $\mathbb{R}$ للمتراجحة $-e^{x}-2e^{-x}\geq -3$ هي	$]1;2[$	$]0;\ln 2[$	$]-\infty;0[\cup]\ln 2;+\infty[$
03	إذا كانت عبارة مشتقة دالة f على $\mathbb{R}$ هي: $f'(x)=\dfrac{x}{2x^{2}+8}$ وكان: $h(x)=f\left(x^{2}\right)$ فإن:	$h'(x)=\dfrac{x^{3}}{x^{4}+4}$	$h'(x)=\dfrac{x^{3}}{2x^{4}+8}$	$h'(x)=\dfrac{x}{x^{4}+4}$
04	f حلا في $\mathbb{R}$ للمعادلة التفاضلية: $y'+(\ln 2)y=\ln 4$ و (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس ، المنحنى (C_f) يقبل عند $+\infty$ مستقيما مقاربا معادلته :	$y=-2$	$y=2$	$y=\ln 2$

II. لتكن الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كمايلي :
$$f(x)=\begin{cases} x^{3}-2x & ; \quad x<0 \\ e^{-2x}-1 & ; \quad x\geq 0 \end{cases}$$

1) بين أن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$

2) أدرس قابلية الإشتقاق للدالة f عند $x_0=0$ ثم فسر النتائج هندسيا .

3) اكتب معادلة المماس (T) لمنحنى الدالة f عند النقطة ذات الفاصلة 0

التمرين الثاني (11 نقاط):

I. الجدول التالي هو جدول تغيرات الدّالة g المعرفة على $]-\infty;0]$ بـ : $g(x)=x^{2}-1+\dfrac{x}{1-x}+\ln(1-x)$

x	$-\infty$	0
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	$\searrow$	

1) أحسب $g(0)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ ، ثم اكمل جدول التغيرات .

2) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على $]-\infty;0]$

ثمّ تحقق أنّ $-1<\alpha<-0.9$ (معتمدا على جدول التغيرات).

3) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-\infty;0]$.

II. لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ كمايلي : $f(x)=-x-3-\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln(1-x)}{x}$

وليكن (c_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) أ- بيين أنّه من أجل كلّ x من المجال $]-\infty;0[$ فإنّ : $f'(x)=\dfrac{-g(x)}{x^{2}}$

ب - استنتج اتجاه تغير الدّالة f على المجال $]-\infty;0[$ ثمّ شكّل جدول تغيراتها .

ج- احسب $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ ، ثمّ فسر النتيجة هندسيا

3) أ) أحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) + x + 3]$ ، ثمّ فسّر النتيجة بيانيا .

ب) أدرس وضعيه (c_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x - 3$

4) بيّن أنّ : $f(\alpha) = -2\alpha - 3 - \dfrac{1}{1-\alpha}$ ثم استنتج حصرا لـ$f(\alpha)$

5) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β حيث $-3.2 < \beta < -3.1$.

6) أنشئ في نفس المعلم (c_f) و (Δ).

7) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m الموجب تماما عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = 1 - \ln m$

8) h هي الدالة المعرفةعلى $\mathbb{R}^*$ كمايلي: $h(x) = -|x| + 3 - \dfrac{1}{|x|} + \dfrac{\ln(1+|x|)}{|x|}$ و (c_h)منحناها البياني في المستوي

أ) بين ان الدالة h زوجية

ب) ارسم في نفس المعلم (c_h) مستعينا بالمنحنى (c_f) موضحا طريقة الرسم .

ليست المشكلة أن تخطئ .....حتى ولو كان الخطأ جسيما ....
إنمـــا المشـــكلة هي عـــدم تـــدارك الخطأ مستقبلا ....
دع القلق ....كن واثقـــــــا بنفسك ...... كن إيجابيا .....

أساتذة المادة: يتمنون لكم كل التوفيق في البكالوريا

المستوى :3 تقني ياضي 2019 - 2018	تصحيح اختبار الثلاثي الأول في مادة الرياضيات	مــتقن : ســرار عبد الحميد – زغـــاية -

التمرين الأول: (09 نقط):

I.

سؤال1	سؤال2	سؤال3	سؤال4
ج	ب	أ	ب

التبرير:

1) نهاية الدالة $f(x)=\frac{e^{-\sqrt{x}}-1}{x}$ عند 0 : هي $-\infty$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{-\sqrt{x}}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{-\sqrt{x}}-1}{\left(\sqrt{x}\right)^2}=\lim_{y\overset{<}{\to}0}\frac{e^{y}-1}{\left(-y\right)^2}$$

$$=\lim_{y\overset{<}{\to}0}\left(\frac{1}{y}\right)\left(\frac{e^{y}-1}{y}\right)=(-\infty)(1)=-\infty$$

بوضع $-\sqrt{x}=y$ يكافئ $\sqrt{x}=-y$ لما $x\to0$ فإنّ $y\overset{<}{\to}0$

2) مجموعة الحلول في $\mathbb{R}$ للمتراجحة $-e^{x}-2e^{-x}\geq-3$ هي $S=]0;\ln2[$

$-e^{x}-2e^{-x}\geq-3$ يكافئ $-e^{x}-\frac{2}{e^{-x}}\geq-3$ يكافئ

$\frac{-e^{2x}-2}{e^{-x}}\geq-3$ يكافئ $-e^{2x}-2\geq-3e^{x}$ يكافئ

$-e^{2x}+3e^{x}-2\geq0$

بوضع $X=e^{x}$ نجد $-X^{2}+3X-2=0$

$\Delta=(3)^2-4(-1)(-2)=9-8=1>0$ للمعادلة حلين متمايزين

$$\begin{cases}X_1=\frac{-3+1}{2(-1)}=\frac{-2}{-2}=1\\ X_2=\frac{-3-1}{2(-1)}=\frac{-4}{-2}=2\end{cases}$$ ومنه $$\begin{cases}e^{x_1}=1\\ e^{x_2}=2\end{cases}$$

يكافئ $$\begin{cases}x_1=\ln(1)=0\\ x_2=\ln(2)\end{cases}$$

ومنه $-e^{2x}+3e^{x}-2=-\left(e^{x}-1\right)\left(e^{x}-2\right)$

x	$-\infty$		0		$\ln(2)$		$+\infty$
$-e^{2x}+3e^{x}-2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$x\in]0;\ln2[$ يكافئ $-e^{x}-2e^{-x}\geq-3$

3) لدينا من أجل كل عدد حقيقي x :

$$h'(x)=\left[f\left(x^2\right)\right]'=2xf'\left(x^2\right)$$

$$=2x\left(\frac{x^2}{2x^4+8}\right)=\frac{2x^3}{2x^4+8}=\frac{x^3}{x^4+4}$$

4) لدينا : $y'+(\ln2)y=\ln4$ يكافئ :

$y'=-(\ln2)y+\ln4$

وهي من الشكل $y'=ay+b$ وحلولها هي الدوال f_c حيث $f_c(x)=ce^{ax}-\frac{b}{a}$ ومنه حلول المعادلة التفاضلية :

$y'=-(\ln2)y+\ln4$ في $\mathbb{R}$ هي الدوال f حيث:

$f(x)=ce^{-\ln(2)x}-\frac{\ln4}{-\ln2}$ ومنه $f(x)=ce^{-\ln(2)x}+2$ مع c ثابت حقيقي.

لدينا : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}ce^{-\ln(2)x}+2=2$

لدينا : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=2$ يكافئ $y=2$ مستقيم مقارب افقي لـ (C_f) بجوار $+\infty$

II. لتكن الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كمايلي :

$$f(x)=\begin{cases}x^3-2x & ;\ x<0\\ e^{-2x}-1 & ;\ x\geq0\end{cases}$$

1) إثبات أن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$

x^3-2x مستمرة على المجال $]-\infty;0[$ لأنها دالة كثير حدود و $e^{-2x}-1$ مستمرة على المجال $]0;\infty[$ اذن f مستمرة على المجال $]-\infty;0[\cup]0;\infty[$

تكون f مستمرة على $\mathbb{R}$ اذا كانت مستمرة عند $x=0$

f مستمرة عند $x=0$ اذا كان $0\in D_f$ و $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$

$0\in D_f$ ، $f(0)=e^0-1=1-1=0$

$$\lim_{x\overset{<}{\to}0}f(x)=\lim_{x\overset{<}{\to}0}x^3-2x=0$$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0}f(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}0}e^{-2x}-1=0$$

ومنه $\lim_{x\overset{<}{\to}0}f(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}0}f(x)=f(0)=0$

اذن الدالة f مستمرة عند $x=0$ وبالتالي فهي مستمرة على $\mathbb{R}$

2) دراسة قابلية الإشتقاق للدالة f عند $x_0=0$ ثم تفسير النتائج هندسيا .

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{e^{-2x}-1}{x}$$

$$=\lim_{y\overset{<}{\to}0}\frac{e^{y}-1}{-\frac{1}{2}y}=\lim_{y\overset{<}{\to}0}\frac{e^{y}-1}{-\frac{1}{2}y}$$

$$=-2\lim_{y\overset{<}{\to}0}\frac{e^{y}-1}{y}=-2\times1=-2$$

بوضع $y=-2x$ يكافئ $x=-\frac{1}{2}y$ لما $x\overset{>}{\to}0$ فإنّ $y\overset{<}{\to}0$

$$\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{x^3-2x}{x}$$

$$=\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{x\left(x^2-2\right)}{x}=\lim_{x\overset{<}{\to}0}x^2-2=-2$$

بما أن $\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-2$

فالدالة f قابلة للإشتقاق عند $x_0=0$ وعددها المشتق هو $f'(0)=2$

التفسير الهندسي : (C_f) يقبل عند النقطة التي فاصلتها $x_0=0$ مماس معامل توجيهه 2

3) كتابة معادلة المماس (T) لمنحنى الدالة f عند النقطة ذات الفاصلة 0

$$(T):\ y=f'(0)(x-0)+f(0)$$

$$y=-2x$$

التمرين الثاني: (11 نقطة)

1) حساب $g(0)$ و $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ ، ثم إكمال جدول التغيرات

$$g(0)==(0)^2-1+\frac{0}{1-0}+\ln(1-0)=\boxed{-1}$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} x^2-1+\frac{x}{1-x}+\ln(1-x)$$
$$=+\infty-1+\infty=\boxed{+\infty}$$

x	$-\infty$		0
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1

2) اثبات أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على $]-\infty;0]$ ثمّ التحقق أنّ $-1<\alpha<-0.9$ (معتمدا على جدول التغيرات).

من جدول التغيرات نلاحظ أنّ g دالة مستمرة ورتيبة تماما على $]-\infty;0]$ ولدينا $\lim_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$ ، $g(0)=\boxed{-1}$

و $0\in]-1;+\infty[$

ومنه : حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α .

- التحقق أنّ $-1<\alpha<-0.9$.

لدينا : $g(-1)=0.193$ ، $g(-0.9)=-0.0218$

ومنه $g(-1)\times g(-0,9)\langle 0$.

3) استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]-\infty;0]$.

من جدول التغيرات ونتيجة السؤال 2) نستنتج أنّ :

x	$-\infty$		α		0
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

II. لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ كمايلي :

$$f(x)=-x-3-\frac{1}{x}+\frac{\ln(1-x)}{x}$$

1) حساب $\lim_{x\xrightarrow{<}0} f(x)$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}0} -x-3-\frac{1}{x}+\frac{\ln(1-x)}{x}$$
$$=-3+(+\infty)+(-1)=\boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}-x-3-\frac{1}{x}+\frac{\ln(1-x)}{x}$$
$$=(+\infty)-(0)+(0)=\boxed{+\infty}$$

لأن
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1-x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left((-x)\left(-\frac{1}{x}+1\right)\right)}{x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(-x)}{x}+\frac{\ln\left(-\frac{1}{x}+1\right)}{x}=0$$

2) أ- اثبات أنّه من أجل كلّ x من المجال $]-\infty;0[$ فإنّ :

$$f'(x)=\frac{-g(x)}{x^2}$$

الدالة f قابلة للإشتقاق على D_f

$$f'(x)=-1+\frac{1}{x^2}+\frac{\left(\frac{-1}{1-x}\right)x-\ln(1-x)}{x^2}$$
$$=\frac{-x^2+1+\left(\frac{-x}{1-x}\right)-\ln(1-x)}{x^2}$$
$$=\frac{-\left(x^2-1+\left(\frac{x}{1-x}\right)+\ln(1-x)\right)}{x^2}=\frac{-g(x)}{x^2}$$

ب- استنتاج اتجاه تغير الدّالة f على المجال $]-\infty;0[$ ثمّ تشكيل جدول تغيراتها .

اشارة $f'(x)$ هي عكس اشارة $g(x)$ لأنه مهما يكن $x\in]-\infty;0[$ فإنّ $x^2>0$.

x	$-\infty$		α		0
$g(x)$		$+$		$-$	‖
$-g(x)$		$-$	0	$+$	‖
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖

✓ اتجاه التغير :

- لما $x\in]-\infty;\alpha[$ فإنّ $f'(x)<0$ والدالة f متناقصة تماما على هذا المجال .
- لما $x\in]\alpha;0[$ فإنّ $f'(x)>0$ والدالة f متزايدة تماما على هذا المجال.
- لما $x=\alpha$ فإنّ $f'(x)=0$

✓ تشكيل جدول تغيرات الدالة f.

x	$-\infty$		α		0
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

ج- حساب $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ ، ثمّ تفسير النتيجة هندسيا

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)=\frac{-g(\alpha)}{\alpha^2}=\frac{0}{\alpha^2}=0$$

التفسير الهندسي : (C_f) يقبل عند النقطة التي فاصلتها $x_0=\alpha$ مماس موازي لمحور الفواصل معادلته $y=f(\alpha)$

3) أ) حساب $\lim_{x\to-\infty}[f(x)+x+3]$ ، ثمّ تفسير النتيجة بيانيا .

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)+x+3]=\lim_{x\to-\infty}-\frac{1}{x}+\frac{\ln(1-x)}{x}=0$$

لدينا $\lim_{x\to-\infty}[f(x)+x+3]=0$ يكافئ $y=-x-3$ مستقيم مقارب مائل لـ (c_f) بجوار $-\infty$

ب) دراسة وضعيه (c_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-x-3$

دراسة اشارة الفرق $f(x)-(-x-3)$

$$[f(x)-(-x-3)]=\frac{-1+\ln(1-x)}{x}$$

إشارة $f(x)-y$ على المجال $]-\infty;0[$ من اشارة البسط والمقام

x	$-\infty$		$1-e$		0
$-1+\ln(1-x)$		$+$	0	$-$	
x		$-$		$-$	
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	‖
الوضعية		(c_f) تحت (Δ)	نقطة تقاطع	(c_f) فوق (Δ)	

4) إثبات أنّ : $f(\alpha)=-2\alpha-3-\frac{1}{1-\alpha}$

لدينا: $g(\alpha)=0$ أي $\alpha^2-1+\frac{\alpha}{1-\alpha}+\ln(1-\alpha)=0$ ومنه

: $\ln(1-\alpha)=-\alpha^2+1-\frac{\alpha}{1-\alpha}$ ....(1)

ولدينا $f(\alpha)=-\alpha-3-\frac{1}{\alpha}+\frac{\ln(1-\alpha)}{\alpha}$

بتعويض (1) نجد:

$$f(\alpha)=-\alpha-3-\frac{1}{\alpha}+\frac{\ln(1-\alpha)}{\alpha}$$
$$=-\alpha-3-\frac{1}{\alpha}+\frac{-\alpha^2+1-\frac{\alpha}{1-\alpha}}{\alpha}$$
$$=-\alpha-3-\frac{1}{\alpha}+\frac{-\alpha^2}{\alpha}+\frac{1}{\alpha}-\frac{\alpha}{\alpha(1-\alpha)}$$
$$=-\alpha-3-\alpha-\frac{1}{1-\alpha}=-2\alpha-3-\frac{1}{1-\alpha}$$

✓ استنتاج حصر لــ$f(\alpha)$

لدينا $-1<\alpha<-0.9$ ومنه

$(-0.9)\times(-2)-3<-2\alpha-3<(-1)\times(-2)-3$

$-1.2<-2\alpha-1<-1$ ....(1)

لدينا $-1<\alpha<-0.9$ ومنه $1.9<1-\alpha<2$

$\frac{1}{2}<\frac{1}{1-\alpha}<\frac{1}{1.9}$

ومنه $-\frac{1}{1.9}<-\frac{1}{1-\alpha}<-\frac{1}{2}$ ....(2)

بجمع (1) و(2) نجد

$$-1.2-\frac{1}{1.9}<-2\alpha-3-\frac{1}{1-\alpha}<-1-\frac{1}{2}$$

ومنه $-1.72<f(\alpha)<-1.5$

$$f(-1)=-2(-1)-3-\frac{1}{1-(-1)}=\boxed{-\frac{3}{2}}$$
$$f(-0.9)=-2(-0.9)-3-\frac{1}{1-(-0.9)}=\boxed{-1.72}$$

5) اثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β حيث $-3.2<\beta<-3.1$.

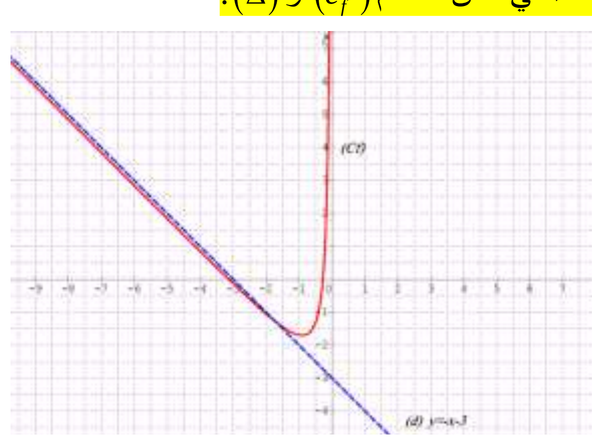
من جدول التغيرات نلاحظ أنّ f دالة مستمرة ومتناقصة تماما (رتيبة) على المجال $]-\infty;\alpha[$ فهي مستمرة ورتيبة على المجال $]-3.2;-3.1[$

ولدينا: $f(-3.1)=-0.0325<0$ و

$f(-3.2)=0.0640>0$ اذن $f(-3.1)\times f(-3.2)\langle 0$

ومنه : حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β حيث $-3.2<\beta<-3.1$

6) إنشاء في نفس المعلم (c_f) و (Δ).



7) المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي m الموجب تماما لعدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=1-\ln m$ ....(*)

- لما: $1-\ln m<f(\alpha)$ اي لما $m>e^{1-f(\alpha)}$ اي لما $m\in\left]e^{1-f(\alpha)};+\infty\right[$ المعادلة $(*)$ لا تقبل حلول
- لما: $1-\ln m=f(\alpha)$ اي لما $m=e^{1-f(\alpha)}$ المعادلة $(*)$ تقبل حل مضاعف
- لما: $1+\ln m>f(\alpha)$ اي لما $m<e^{1-f(\alpha)}$ اي لما $m\in\left]-\infty;e^{1-f(\alpha)}\right[$ المعادلة $(*)$ تقبل حلين

8) h هي الدالة المعرفةعلى $\mathbb{R}^*$ كمايلي: $h(x)=-|x|+3-\frac{1}{|x|}+\frac{\ln(1+|x|)}{|x|}$ و (c_h) منحناها البياني في المستوي

أ) إثبات ان الدالة h زوجية

من اجل $x\in D_h$ فإنّ $-x\in D_h$ اي ان D_h متناظر بالنسبة الى 0

$$h(-x)=-|-x|+3-\frac{1}{|-x|}+\frac{\ln(1+|-x|)}{|-x|}$$
$$=-|x|+3-\frac{1}{|x|}+\frac{\ln(1+|x|)}{|x|}=h(x)$$

ومنه h دالة زوجية

ج) رسم في نفس المعلم (c_h) مستعينا بالمنحنى (c_f) موضحا طريقة الرسم .

$$h(x)=\begin{cases}-x+3-\frac{1}{x}-\frac{\ln(1+x)}{x} & ;\ x>0\\ x+3+\frac{1}{x}-\frac{\ln(1-x)}{x} & ;\ x<0\end{cases}$$
$$=\begin{cases}-x+3-\frac{1}{x}-\frac{\ln(1+x)}{x} & ;\ x>0\\ -f(x) & ;\ x<0\end{cases}$$

نلاحظ ان $h(x)=-f(x)$ اذا كان $x\in]-\infty;0[$ ومنه المنحنى (C_h) الممثل للدالة h يكون نظير المنحنى (C_f) الممثل للدالة f بالنسبة لمحور الفواصل في المجال $]-\infty;0[$ اما في المجال $]0;+\infty[$ فيكفي مناظرة (C_h) في المجال $]-\infty;0[$ بالنسبة لمحور التراتيب لان h دالة زوجية