التصحيح

الموضوع الاول

التمرين الاول : (04 نقاط)

$A(1,2,2)$ $\quad B(-1\ ,\ 0,1)$ و $C(3,2,1)$

1) إثبات أن المستوي (Q) الذي يشمل النقط A و B و C معادلته $x-2y+2z-1=0$

لدينا $1-2\times2+2\times2-1=0$ أي $A\in(Q)$ و $-1-2\times0+2\times1-1=0$ أي $B\in(Q)$ و $3-2\times2+2\times1-1=0$ أي $C\in(Q)$

إذن (Q) هو المستوي (ABC) -- 0.5

2)(P) مستو حيث $z=1$ معادلة له

ا) التحقق أن المستقيم (BC) محتوى في المستوي (P).

لدينا $B\in(P)$ و $C\in(P)$ ومنه (BC) محتوى في المستوي (P) -------------------------------------- 0.5

ب)استنتاج تقاطع المستوي (P) و (Q)

بما أن $(BC)\subset(P)$ و $(BC)\subset(Q)$ فان $(P)\cap(Q)=\{(BC)\}$ ------------------------------------ 0.5

جـ) تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (BC)

لدينا $t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}x-2y+2z-1=0\\ y=t\\ z=1\end{cases}$ معناه $\begin{cases}x=2t-1\\ y=t\\ z=1\end{cases}$ مع $t\in\mathbb{R}$ ------------------------------------ 0.5

3)إثبات أن النقطة $H(1,2,1)$ هو المسقط العمودي للنقطة A على (P)

لدينا من جهة $\overrightarrow{HA}(0,0,1)$ و $\vec{n}_p(0,0,1)$ أي $\overrightarrow{HA}$ و $\vec{n}_p$ مرتبطان خطيا ومن جهة أخرى $H\in(P)$

إذن H هي مسقط للنقطة A على (P) -- 0.5

(BC) و (AH) غير متقاطعان لأنهما ليسا من نفس المستوي

التبرير $H\notin(BC)$ لان $\begin{cases}1=2t-1\\ 2=t\\ 1=1\end{cases}$ أي $\begin{cases}t=1\\ t=2\end{cases}$ -- 0.5

4) G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1),(B,1),(C-1)\}$

ا) $x_G=\dfrac{1\times1+1\times(-1)-1\times3}{1}=-3$ $\quad,\quad$ $y_G=\dfrac{1\times2+1\times0-1\times2}{1}=0$ $\quad,\quad$ $z_G=\dfrac{1\times2+1\times1-1\times1}{1}=2$

إذن G(-3,0,2) -- 0.5

ب) تعيين (E) مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=3\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|\leftarrow(*)$

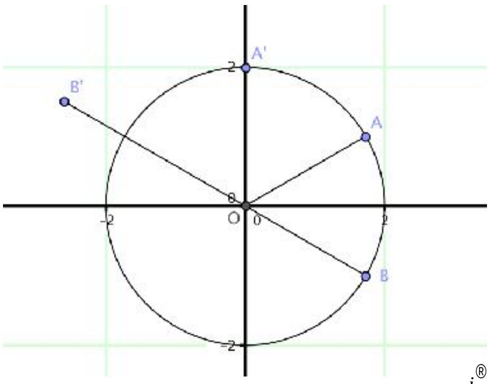
لتكن النقطة k مركز ثقل المثلث ABC اذن (*) تكافئ 3MG =3MK أي MG=MK

إذن المجموع (E) هو مجموع نقط المستوي المحوري للقطعة $[GK]$ ------------------------------- 0.5

التمرين الثاني :(05نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقطتين A و B حيث: $z_A=\sqrt{3}+i$ $\quad,\quad$ $z_B=\sqrt{3}-i$

/1 كتابة z_A و z_B على الشكل الأسي .



لدينا $z_A=\sqrt{3}+i=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=\left[2,\dfrac{\pi}{6}\right]$ أي $z_A=2e^{i\frac{\pi}{6}}$

و $z_B=\overline{z_A}=\left[2,-\dfrac{\pi}{6}\right]$ أي $z_B=2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ ------- 0.5

2) r دوران مركزه o وزاويته $\dfrac{\pi}{3}$ معناه $z'=e^{i\frac{\pi}{3}}z$ -------- 0.5

تعيين $z_{A'}$ لاحقة A' صورة A بالدوران r لدينا $z_{A'}=e^{i\frac{\pi}{3}}\times2e^{i\frac{\pi}{6}}=2e^{i\frac{\pi}{2}}=2i$ إنشاء النقطة A' ---------- 0.5

3) h التحاكي الذي مركزه o ونسبته $-\frac{3}{2}$ معناه $z' = -\frac{3}{2}z$

الكتابة على الشكل المثلثي $z_{B'}$ لاحقة B’ صورة B بالتحاكي h.

$$z_{B'} = -\frac{3}{2}\times 2e^{i\left(-\frac{®}{6}\right)} = -\frac{3}{2}\times 2\left(\cos\left(-\frac{®}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{®}{6}\right)\right)$$

لدينا $=3\left(-\cos\left(-\frac{®}{6}\right)-i\sin\left(-\frac{®}{6}\right)\right)$ أي $z_{B'} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$ الإنشاء ------- 0.5

$$=3\left(\cos\left(®-\frac{®}{6}\right)+i\sin\left(®-\frac{®}{6}\right)\right)=\left[3\,,\,\frac{5®}{6}\right]$$

4) µ مركز الدائرة المحيطة بالمثلث OA’B’ و R نصف قطرها و z_{μ} لاحقة النقطة µ

ا) باستعمال الخاصية $z\overline{z}=|z|^2$

لدينا $(z_{\mu}-2i)(\overline{z_{\mu}}+2i)=(z_{\mu}-2i)(\overline{z_{\mu}-2i})=|z_{\mu}-2i|^2=\mu A'^2=R^2$ 0.5--------------------------

و $\left(z_{\mu}+\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\right)\left(\overline{z_{\mu}}+\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right)=\left(z_{\mu}+\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\right)\left(\overline{z_{\mu}+\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i}\right)=\left|z_{\mu}-\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right)\right|^2=\mu B'^2=R^2$ 0.5-----

ب) لنستنتج أن $z_{\mu}-\overline{z_{\mu}}=2i$

لدينا $(z_{\mu}-2i)(\overline{z_{\mu}}+2i)=R^2$ معناه $\cancel{z_{\mu}\overline{z_{\mu}}}+2i\,z_{\mu}-2i\,\overline{z_{\mu}}+4=\cancel{R^2}$ لأن $(z_{\mu}\overline{z_{\mu}}=R^2)$

معناه $2i(z_{\mu}-\overline{z_{\mu}})=-4$

معناه $z_{\mu}-\overline{z_{\mu}}=-\frac{4}{2i}=2i$ 0.5 --

ولدينا من جهة أخرى $\left(z_{\mu}+\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\right)\left(\overline{z_{\mu}}+\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right)=R^2$ يكافئ $\cancel{z_{\mu}\overline{z_{\mu}}}+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right)z_{\mu}+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\right)\overline{z_{\mu}}+9=\cancel{R^2}$

يكافئ $\frac{3\sqrt{3}}{2}(z_{\mu}+\overline{z_{\mu}})+\frac{3}{2}i(z_{\mu}-\overline{z_{\mu}})+9=0$

يكافئ $\frac{\sqrt{3}}{2}(z_{\mu}+\overline{z_{\mu}})+\frac{1}{2}i\,(2i)+3=0$

يكافئ $\frac{\sqrt{3}}{2}(z_{\mu}+\overline{z_{\mu}})-1+3=0$

يكافئ $\frac{\sqrt{3}}{2}(z_{\mu}+\overline{z_{\mu}})=-2$

يكافئ $z_{\mu}+\overline{z_{\mu}}=\frac{-4\sqrt{3}}{3}$ 0.5 ----------------------

ج) لنستنتج لاحقة النقطة µ وقيمة R

لدينا $z_{\mu}+\overline{z_{\mu}}=-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ بالجمع نجد $2z_{\mu}=-\frac{4\sqrt{3}}{3}+2i$

$z_{\mu}-\overline{z_{\mu}}=2i$

ومنه $z_{\mu}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}+i$ 0.5 --

و بالتالي $R=|z_{\mu}|=\frac{\sqrt{7}}{3}$ 0.5 ---

التمرين الثالث :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=8$ و $u_{n+1}=2u_n+5n-5$

1) $u_1=2u_0-5=11$, $u_2=2u_1+0=22$, $u_3=2u_2+5\times2-5=49$ ---------------- 0.5

2) نضع من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n=u_n+5n$

- **إثبات أن (v_n) متتالية هندسية مع تعين أساسها وحدها الأول .**

لدينا $v_{n+1}=u_{n+1}+5(n+1)=2u_n+5n-5+5n+5=2u_n+10=2(u_n+5)=2v_n$

أي (v_n) هندسية أساسها 2 وحدها الأول $v_0=u_0=8$ ---------------------------------- 0.5

عبارة v_n بدلالة n : $v_n=8\times2^n=2^{n+3}$

عبارة u_n بدلالة n : $u_n=v_n-5n=2^{n+3}-5n$ 0.5

0.5 --- $\lim u_n=\lim(8\times2^n-5n)=\lim n\left(8\dfrac{2^n}{n}-5\right)=+8$

-**تعيين العدد الطبيعي n حيث** $2^n=2048$

لدينا $2^n=2048$ ومنه $n\ln2=\ln2048$ ومنه $n=\dfrac{\ln2048}{\ln2}=11$ ---------------------------- 0.5

لستنتاج أن 2008 حد من حدود المتتالية (u_n).

لدينا $u_8=2008$ لان $u_8=2^{8+3}-5\times8=2^{11}-40=2048-40=2008$ -------------------------- 0.5

إثبات انه من اجل كل عدد طبيعي k : $2^{4k+1}\equiv2[10]$

باستعمال البرهان بالتراجع : نسمي P(k) هذه الخاصية .

ا) نتحقق من صحة P(0) : لدينا $2^{4\times0+1}=2$ و $2\equiv2[10]$

ب) نفرض أن P(k) صحيحة أي $2^{4k+1}\equiv2[10]$ من اجل أي عدد طبيعي k

و نبرهن أن P(k+1) صحيحة أي $2^{4(k+1)+1}\equiv2[10]$ من اجل أي عدد طبيعي k؟

لدينا $2^{4(k+1)+1}=2^4\times2^{4k+1}$ مع $(2^4\equiv6[10];2^{4k+1}\equiv2[10])$ ومنه $2^4\times2^{4k+1}\equiv6\times2[10]$ ومنه $2^{4k+5}\equiv2[10]$

أي P(k+1) صحيحة

نتيجة : من أ) وب)وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فان $2^{4k+1}\equiv2[10]$ --------------------------- 01

- **إثبات أن u_n عدد طبيعي** $(u_n=8\times2^n-5n)$

- لإثبات أن $(8\times2^n-5n)\in\mathbb{N}$ يكفي أن نثبت أن $8\times2^n\geq5n$ (لان $8\times2^n\in\mathbb{N}$; $5n\in\mathbb{N}$)

لدينا من اجل أي عدد طبيعي n : $(8>5$; $2^n>n)$ ومنه $8\times2^n>5n$ ومنه $8\times2^n-5n>0$ ومنه $u_n\in\mathbb{N}$ ---- 0.5

($2^n>n$ من اجل أي عدد طبيعي n يمكن إثباتها بالتراجع)

- تعيين حسب قيم n رقم آحاد العدد u_n.

أي ندرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة u_n على 10 لدينا:

$n\equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	[10]
$2^n\equiv$	1	2	4	8	6	2	4	8	6	2	[10]
$8\times2^n\equiv$	8	6	2	4	8	6	2	4	8	6	[10]
$5n\equiv$	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5	[10]
u_n	8	1	2	9	8	1	2	9	8	1	[10]

من اجل n=4P $P\in\mathbb{N}$ رقم الآحاد هو 8

من اجل n=4P+1 $P\in\mathbb{N}$ رقم الآحاد هو 1

من اجل n=4P+2 $P\in\mathbb{N}$ رقم الآحاد هو 2

من اجل n=4P+3 $P\in\mathbb{N}$ رقم الآحاد هو 9

0.5

التمرين الرابع :

I . لتكن الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=1+x+e^{x}$

1) دراسة تغيرات الدالة g

- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

- الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $g'(x)=1+e^{x}$ أي $g'(x)>0$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$\sim$	$+\infty$
f'(x)		+	
1 + x + e (x)	$-\infty$	0	$+\infty$

2) إثبات أن $g(x)=0$ تقبل حل وحيد $\sim$ حيث $-1,3<\sim<-1,2$

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و تأخذ قيمها في $\mathbb{R}$ إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد $\sim$ في $\mathbb{R}$

ولدينا $g(-1,3)\simeq-0.02$ و $g(-1,2)\simeq0.1$ أي $g(-1,3)\times g(-1,2)<0$ ومنه $-1,3<\sim<-1,2$ ---------------- 0.5

3) تحديد تبعا لقيم x إشارة g(x)

$g(x)=0; x=\sim$ و $g(x)<0; x<\sim$ و $g(x)>0; x>\sim$ ------- 0.25

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{xe^{x}}{1+e^{x}}$ ، (Γ) تمثيلها البياني .

1) دراسة تغيرات الدالة f

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+e^{x}\right)=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}\right)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}$ 0.25

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا :

$$f'(x)=\frac{\left(1+e^{x}\right)(1+x)e^{x}-xe^{2x}}{\left(1+e^{x}\right)^{2}}=\frac{e^{x}+xe^{x}+e^{2x}+2e^{2x}-xe^{2x}}{\left(1+e^{x}\right)^{2}}=\frac{\left(1+x+e^{x}\right)e^{x}}{\left(1+e^{x}\right)^{2}}=\frac{e^{x}\times g(x)}{\left(1+e^{x}\right)^{2}}$$ ------------ 0.25

علما انه من اجل أي عدد حقيقي x : $\dfrac{e^{x}}{\left(1+e^{x}\right)^{2}}>0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة g(x) أي

- إذا كان $x=\sim$ فإن $f'(x)=0$
- إذا كان $x<\sim$ فإن $f'(x)<0$ ومنه الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty,\sim[$
- إذا كان $x>\sim$ فإن $f'(x)>0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على $]\sim,+\infty[$

x	$-\infty$	$\sim$	$+\infty$
f'(x)	−	0	+
f(x)	0	$\sim+1$	$+\infty$

إثبات أن $f(\sim)=1+\sim$

لدينا $g(x)=0$ معناه $1+\sim+e^{\sim}=0$ أي $e^{\sim}=-(1+\sim)=-1-\sim$

ولدينا $f(x)=\dfrac{\sim e^{\sim}}{1+e^{\sim}}=\dfrac{\sim(-1-\sim)}{1-1-\sim}=1+\sim$ -------------------- 0.5

إثبات أن (Γ) يقبل مستقيم مقارب (Δ) حيث $y=x$ معادلة له

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{xe^{x}}{1+e^{x}}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{xe^{x}-x-xe^{x}}{1+e^{x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{x}{1+e^{x}}\right)=0$$ ------------------ 0.5

- كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (Γ) عند النقطة O : $y=\dfrac{1}{2}x$ ------------------- 0.5

- دراسة وضعية (Γ) بالنسبة إلى (T).

ندرس إشارة الفرق $\left(f(x)-\dfrac{1}{2}x\right)$ أي إشارة $\dfrac{x}{2}\left(\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)$

من اجل $x<0$ فان $e^{x}<1$ ومنه $e^{x}-1<0$ ومنه $\dfrac{x}{2}\left(\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)\succ0$ أي (Γ) فوق (T)

من اجل $x>0$ فان $e^{x}>1$ ومنه $e^{x}-1>0$ ومنه $\dfrac{x}{2}\left(\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)\succ0$ ومنه (Γ) فوق (T) 0.5

H(2 نقطة فاصلتها x وترتيبها معدوم . المستقيم الموازي للمحور (yy') والمار من H يقطع (Γ) في النقطة M ويقطع المقارب (Δ) في النقطة N.

نضع $\varphi(x)=\overline{MN}$

أ) اثبات ان $\varphi(x)=\frac{x}{1+e^x}$

لدينا $\varphi(x)=x-f(x)$ أي $\varphi(x)=x-\frac{xe^x}{1+e^x}$ أي $\varphi(x)=\frac{x}{1+e^x}$ ------------------------- 0.5

البرهان انه من اجل كل عدد حقيقي x لدينا $\varphi'(x)=\frac{e^x}{(1+e^x)^2}\times g(-x)$

لدينا $\varphi'(x)=-\frac{1+e^x-xe^x}{(1+e^x)^2}=\frac{e^x\left(e^{-x}+1-x\right)}{(1+e^x)^2}=\frac{e^x}{(1+e^x)^2}\times g(-x)$ --------------- 0.5

$\varphi'(x)=0$ معناه $g(-x)=0$ معناه $-x=\alpha$ و منه $x=-\alpha$

$\varphi'(x)>0$ معناه $g(-x)>0$ معناه $-x>\alpha$ ومنه $x<-\alpha$

$\varphi'(x)<0$ معناه $g(-x)<0$ معناه $-x<\alpha$ ومنه $x>-\alpha$

أي $\varphi(x)$ تقبل قيمة حدية عظمى من اجل $x=-\alpha$

جـ) إثبات أن $f(-\alpha)=1$

لدينا $f(-\alpha)=\frac{-\alpha e^{-\alpha}}{1+e^{-\alpha}}=\frac{-\alpha}{1+e^{\alpha}}=\frac{-\alpha}{1-1-\alpha}=\frac{-\alpha}{-\alpha}=1$ ---------------------------- 0.25

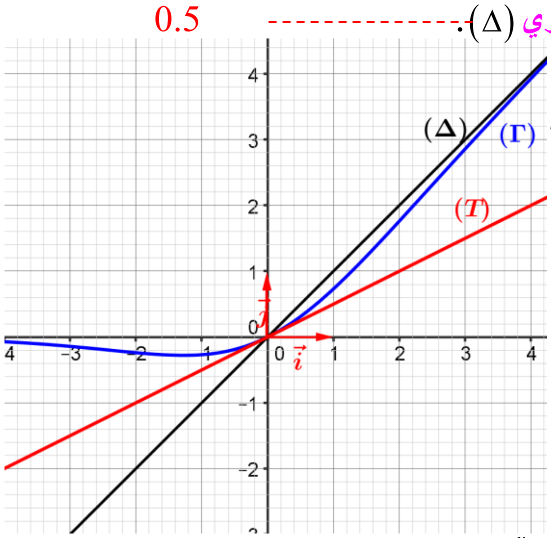
د) البرهان أن المماس للمنحنى (Γ) عند النقطة A ذات الفاصلة $-\alpha$ يوازي (Δ). -------------- 0.5

لدينا $f'(-\alpha)=\frac{e^{-\alpha}}{(1+e^{-\alpha})^2}\times g(-\alpha)=\frac{e^{-\alpha}\left(1-\alpha+e^{-\alpha}\right)}{(1+e^{-\alpha})^2}=\frac{1+e^{\alpha}-\alpha e^{\alpha}}{(1+e^{-\alpha})^2}$

مع $e^{\alpha}=-1-\alpha$ إذن $f'(-\alpha)=\frac{1-1-\alpha-\alpha(-1-\alpha)}{(1-1-\alpha)^2}=1$

ومنه المماس في A يوازي (Δ).

هـ) الرسم لكل من (Γ) و (Δ) و (T)



3. أ) البرهان انه من اجل كل عدد حقيقي x حيث $x\geq 1$ لدينا $\frac{e^x}{1+e^x}\leq f(x)\leq x$

نبرهن من جهة أن $f(x)\leq x$ أي $\frac{xe^x}{1+e^x}\leq x$ أي $\frac{xe^x}{1+e^x}-x\leq 0$ أي $\frac{-x}{1+e^x}\leq 0$ و هذا صحيح من اجل $x\geq 1$

ونبرهن من جهة أخرى أن $f(x)-\frac{e^x}{1+e^x}\geq 0$ أي $\underbrace{\frac{e^x}{1+e^x}}_{\geq 0}\Big(\underbrace{x-1}_{\geq 0}\Big)\geq 0$ و هذا صحيح وبالتالي $\frac{e^x}{1+e^x}\leq f(x)\leq x$ ---- 0.5

ب) إيجاد حصر لمساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (Γ) و المستقيمات التي معادلتها **y=0** ، **x=1** و $x=-\alpha$

بمأن $\frac{e^x}{1+e^x}\leq f(x)\leq x$ فإن $\int_1^{-\alpha}\frac{e^x}{1+e^x}dx\leq\int_1^{-\alpha}f(x)\,dx\leq\int_1^{-\alpha}x\,dx$

أي $\left[\ln\left(1+e^x\right)\right]_1^{-\alpha}\leq\int_1^{-\alpha}f(x)\,dx\leq\frac{1}{2}\left[x^2\right]_1^{-\alpha}$

أي $\ln\left(\frac{1+e^{-\alpha}}{1+e}\right)u.a\leq\int_1^{-\alpha}f(x)\,dx\leq\frac{1}{2}\left(\alpha^2-1\right)u.a$ ------------------------------- 0.5