التصحيح

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط) θ عدد حقيقي من المجال $[0,\pi]$ و $f(z)$ كثير الحدود حيث :

(1 $f(z)=z^3-(1-2\sin\theta)z^2+(1-2\sin\theta)z-1$

أ) التحقيق ان العدد 1 جذر لـ $f(z)$

لدينا $f(1)=1^3-(1-2\sin\theta)\times1^2+(1-2\sin\theta)\times1-1$

$=1-1+2\sin\theta+1-2\sin\theta-1=0$ ------------------ 0.5

أي 1 هو جذر لـ $f(z)$

ب) تعين العددين الحقيقيين a و b حيث $f(z)=(z-1)(z^2+az+b)$

باستعمال طريقة هورنر نجد

	1		
1	$-1+2\sin\theta$	$1-2\sin\theta$	-1
	1	$2\sin\theta$	1
1	$2\sin\theta$	1	0

اذن $a=2\sin\theta$ و b=1 ------------------------------ 0.5

جـ) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة f(z)=0

f(z)=0 يكافئ $(z-1)(z^2+2\sin\theta\times z+1)=0$ يكافئ z-1=0 او

$z^2+2\sin\theta\times z+1=0$

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2+2\sin\theta\times z+1=0$

$\Delta=4\sin^2\theta-4=4(\sin^2\theta-1)=-4\cos^2\theta$ اذن $\Delta=4i^2\cos^2\theta$

اما $z=\dfrac{-2\sin\theta-2i\cos\theta}{2}$ او $z=\dfrac{-2\sin\theta+2i\cos\theta}{2}$ --- 0.5

$=-\sin\theta-i\cos\theta$ $\quad$ $=-\sin\theta+i\cos\theta$

$A(z_1=1),B(z_2=-\sin\theta+i\cos\theta);C(z_3=-\sin\theta-i\cos\theta)$

2) أ) كتابة كل من z_1 , z_2 ; z_3 على الشكل الأسي.

لدينا $z_1=1=[1,0]=e^{i0}$ -- 0.5

$z_2=-\sin\theta+i\cos\theta=\sin(-\theta)+i\cos(-\theta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\left[1,\frac{\pi}{2}+\theta\right]=e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$ 0.5

$z_3=\overline{z_2}=e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$ -- 0.5

ب) المثلث ABC متساوي الساقين لان $|z_1-z_2|=|z_1-z_3|=\sqrt{2(1+\sin\theta)}$ -------------- 0.5

تعيين قيمة θ حتى يكون ABC قائم في A .

A(1 ;0) ، $B(-\sin\theta;\cos\theta)$ و $C(-\sin\theta;-\cos\theta)$ $\quad$ $\overrightarrow{BA}(1+\sin\theta;-\cos\theta)$ $\quad$ $\overrightarrow{CA}(1+\sin\theta;\cos\theta)$

$(1+\sin\theta)^2-\cos^2\theta=0$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA}=0$ يكافئ $2\sin^2\theta+2\sin\theta=0$ $\quad$ (1)

$2\sin\theta(\sin\theta+1)=0$

يكافئ $\sin\theta=0$ أو $\sin\theta+1=0$ لا تقبل حل في المجال $[0,\pi]$

يكافئ $\theta=k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$

وبما ان $\theta\in[0,\pi]$ فان $\theta=\{0,\pi\}$ -- 0.5

ج) مركز G مركز المثلث ABC نعتبر لاحقة G أي Z_G ------------------------------ 0.5

د) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MO}\right\|$ ⟵ (*)

(*) يكافئ $\left\|3\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MO}\right\|$

يكافئ MG=MO

أي مجموعة النقط M هي محور القطعة المستقيمة $[GO]$ ------------------------- 0.5

التمرين الثاني :(05نقاط)

1) بما أن $B\in(P)$ و $C\in(P)$ فان المستقيم $(BC)\in(P)$ ---------------- 01

2) إحداثيات D هي (1،2،1) ---------------------- 01

3) $\begin{cases} x=2t+1 \\ y=2t \qquad t\in\mathbb{R} \\ z=1 \end{cases}$ تمثيل وسيطي لـ (BC) -------------- 01

4) المستقيمان (Δ) و (BC) متقاطعان (متعامدان) فهما من نفس المستوي $\vec{n}_\Delta.\overrightarrow{BC}=0$ ---------- 01

5) S سطح كرة مركزها $\mu(1,2,2)$ ونصف قطرها r = 3 $d(\mu,P)=1cm$ ----------- 01

6) إذن S و (P) متقاطعان

التمرين الثالث: (04 نقاط)

نعتبر المعادلة 4x-13y=7 $\longleftarrow$ (1) حيث x وy عددان صحيحان

1) تعيين الحل الخاص (x_0,y_0) للمعادلة (1) الذي يحقق $x_0-y_0=4$

حل الجملة $\begin{cases} 4x_0-13y_0=7 \\ x_0-y_0=4 \end{cases}$

المحدد $d=\begin{vmatrix} 4 & -13 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=9$ أي $y_0=\dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}{9}=1$; $x_0=\dfrac{\begin{vmatrix} 7 & -13 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}{9}=5$ --------------------- 01

إذن (5,1) حل خاص للمعادلة (1)

2) تعيين حلول المعادلة (1) لدينا $\begin{array}{l} 4x-13y=7 \\ \underline{4\times5-13\times1=7} \\ 4(x-5)-13(y-1)=0 \end{array}$ أي 4(x-5)=13(y-1)

لدينا $13 \mid 4(x-5)$ و 13 14=1 إذن $13 \mid x-5$ ومنه x=13k+5

$k\in\mathbb{R}$

$4 \mid 13(y-1)$ و 41 13=1 إذن $4 \mid y-1$ ومنه y=4k+1

3) ليكن له القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين x وy

* القيم الممكنة للعدد d إذا كان (x ,y) حلا للمعادلة (1)

لدينا $d \mid x$ ومنه $d \mid y$ ومنه $d \mid 4x$ و $d \mid 13y$ ومنه $d \mid 4x-13y$ ومنه $d \mid 7$ إذن $d\in D_7$ أي $d\in\{1,7\}$ ------ 0.5

نعتبر الثنائيات (x ,y) من الأعداد الطبيعية حلول المعادلة (1) بحيث يكون d=7

$\begin{cases} x\equiv0[7] \\ \text{او} \\ y\equiv0[7] \end{cases}$ معنه $\begin{cases} 13k+5\equiv0[7] \\ 4k+1\equiv0[7] \end{cases}$

$2\times4k\equiv-2[7]$

$4k+1\equiv0[7]$ يكافئ $4k\equiv-1[7]$ يكافئ $k\equiv5[7]$ اي $k=7\sim+5$

$\sim\in\mathbb{N}$

و بالتالي $x=91\sim+70$ و $y=28\sim+21$ $(\sim\in\mathbb{N})$ ------------------------ 1

نعتبر الثنائيات (x ,y) من الأعداد الطبيعية حلول المعادلة (1) والتي تحقق $\begin{cases} d=7 \\ x+y<400 \end{cases}$

$91\sim + 70 + 28\sim + 21 < 400$

$119\sim + 91 < 400$

$119\sim < 309$ يكافئ $x + y < 400$

$\sim < \dfrac{309}{119}$

$\sim < 2,6$

$\sim \in \{0;1,2\}$

إذن

$(x,y) \in \{(70,21);(161,49),(252,77)\}$ ------------------------------- 0.5

التمرين الرابع :(07نقاط)

نعتبر الدالة U المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $U(x) = \sqrt{x^2+1} - x$

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} U(x) = +\sim$ --------------- 0.25

$\lim\limits_{x\to+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - x$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$ 0.25

2) أ) نبرهن أن : (U(x)+2x) تؤول إلى ∞ عندما x يؤول الى $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} (U(x)+2x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+1}+x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = 0$$

(المستقيم ذو المعادلة y=-2x مستقيم مقارب مائل لـ (¨) بجوار $-\infty$)

ب) نبرهن انه من اجل $x \in \mathbb{R}$: $U(x)>0$ أي $\sqrt{x^2+1} - x$

من اجل $x<0$ فان $\sqrt{x^2+1} > x$ 0.5

$x>0$ فان $\sqrt{x^2+1} > x$ ومنه $x^2+1>x^2$ أي $1>0$ صحيحة

ج) لستنتاج إشارة $(U(x)+2x)$

$U(x) + 2x = \sqrt{x^2+1} + x$

لدينا

$= -\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$

إذن إشارة $(U(x)+2x)$ من إشارة $\sqrt{x^2+1} - x$ وهو موجب دوما. --------- 0.5

التفسير البياني : المنحنى (¨) يقع فوق المستقيم المقارب .

3) نبرهن ان $u'(x) = \dfrac{-U(x)}{\sqrt{x^2+1}}$

أ) الدالة U قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا :

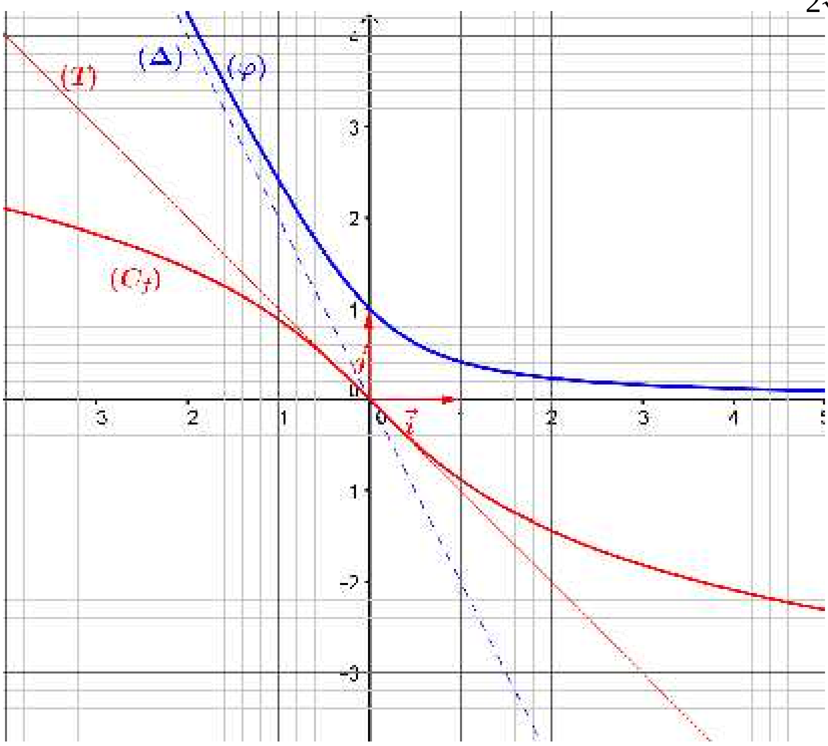
$U'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 1 = \dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{-U(x)}{\sqrt{x^2+1}}$ ------------------------- 0.5

ب) دراسة تغيرات الدالة

إشارة U'(x) عكس إشارة $U(x)$

أي U'(x)<0 من اجل كل $x \in \mathbb{R}$

ج) رسم (¨) و المستقيمات المقاربة له .



الجزء الثاني :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

1/ نتحقق انه من اجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=\ln\left(u(x)\right)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا : $f'(x)=\frac{U'(x)}{U(x)}=\frac{-U(x)}{\sqrt{x^2+1}}\times\frac{1}{U(x)}=\frac{-1}{\sqrt{x^2+1}}$ ------------------ 0.5

2/ بما أن $\lim_{x\to-\infty}U(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty}U(x)=0^+$ فإن $\begin{cases}\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty\\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty\end{cases}$ 0.5

دراسة تغيرات الدالة f لدينا $f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{x^2+1}}<0$ و منه الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$

3/ كتابة معادلة للمستقيم (T) مماس (Γ) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

$y=f'(0)(x-0)+f(0)$ أي $y=-x$ ------------------------------------ 0.5

نعتبر الدالة $\ddot{}$ على $\mathbb{R}$ لدينا : $\ddot{}(x)=1-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}}$

من اجل أي عدد حقيقي x لدينا : $x^2+1>1$ أي $\sqrt{x^2+1}>1$

أي $\sqrt{x^2+1}-1>0$

أي $\ddot{}'(x)>0$

وبالتالي $\ddot{}$ متزايدة

ولدينا $\ddot{}(0)=f(0)+2=0$ -------------------------------- 0.25

أ) رسم (Γ) و المماس (T) -------------------------------- 0.5

5) حساب مساحة الحيز المستوى المحدد بالمنحنى (Γ) و المستقيمات التي معادلتها y=0 ، x=0 و $x=\sim$ $(\sim>0)$

لدينا $A(\sim)=\int_0^{\sim}-f(x)dx=\int_0^{\sim}-\ln\left(U(x)dx\right)$

باستعمال التكامل بالتجزئة

نضع $S(x)=\ln\left(U(x)\right)$ ومنه $S'(x)=\frac{U'(x)}{U(x)}$

$t'(x)=1$ $t(x)zx$

$$A(\sim)=-\left[x\ln\left(U(x)\right)\right]_0^{\sim}+\int_0^{\sim}x\times\frac{U'(x)}{U(x)}dx$$

مع $\frac{U'(x)}{U(x)}=\frac{-1}{\sqrt{x^2+1}}$ من الجواب للسؤال 3) أ)

$$A(\sim)=-\left[x\ln\left(U(x)\right)\right]_0^{\sim}-\int_0^{\sim}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

$$=-\left[x\ln\left(U(x)\right)\right]_0^{\sim}-\frac{1}{2}\int_0^{\sim}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

إذن $=-\left[x\ln\left(U(x)\right)\right]_0^{\sim}-\frac{1}{2}\left[2\sqrt{x^2+1}\right]_0^{\sim}$ 0.5 ----------

$$=-\left[x\ln\left(U(x)\right)-\sqrt{x^2+1}\right]_0^{\sim}$$

$$=\left(1-\sim\ln\left(U(\sim)\right)-\sqrt{\sim^2+1}+1\right)U.A$$

انتهى

بالتوفيق في البكالوريا