الأعداد المركبة

الحجم الساعي: 12 ساعة + 2 ساعات + 8 ساعات

المحتوى	الكفاءات المستهدفة	توجيهات . تعاليق . أمثلة لأنشطة
الأعداد المركبة. الكتابات المختلفة لعدد مركب، الترميز $\mathbb{C}$ ، العمليات على الأعداد المركبة، ترميز أولير : $e^{i\theta}$	ـ إجراء العمليات الحسابية على الأعداد المركبة. ـ استعمال خواص مرافق عدد مركب. ـ حساب الطويلة وعمدة لعدد مركب غير معدوم. ـ الانتقال من الشكل الجبري إلى الشكل المثلثي والعكس. ـ التعبير عن خواص لأشكال هندسية باستعمال الأعداد المركبة. ـ توظيف خواص الطويلة والعمدة لحل مسائل في الأعداد المركبة وفي الهندسة. ـ توظيف دستور موافر لحل مسائل في الأعداد المركبة وفي الهندسة.	ـ ندرس الأعداد المركبة في إطار هندسي. ـ نقترح أنشطة تتعلق بالبحث عن مجموعات نقط و | أو المرجح. ـ يرمز $e^{i\theta}$ للعدد المكب $\cos\theta + i\sin\theta$. ـ نميز دائرة مركزها النقطة Ω ذات اللاحقة z_0 أو نصف مستقيم مبدأه Ω بعلاقة من الشكل $z = z_0 + ke^{i\theta}$ ، k ثابت موجب و θ يمسح $\mathbb{R}$ عندما يتعلق الأمر بالدائرة أو θ ثابت و k يمسح $\mathbb{R}_+$ عندما يتعلق الأمر بنصف المستقيم. ـ يدرج تفسير طويلة وعمدة العددين $z_A - z_B$ و $\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_D}$ واستعمالهما في حل مسائل هندسية. ـ نبرهن الدساتير المتعلقة لطويلة وعمدة جداء أو حاصل قسمة عددين مركبين غير معدومين، نبين عندئذ أهمية ترميز أولير. (نستعمل ترميز أولير لإيجاد دساتير التحويل المدروسة سابقا في حساب المثلثات).
المعادلة من الدرجة الثانية في $\mathbb{C}$.	ـ حل معادلة من الدرجة الثانية. ـ حل معادلات يؤول حلها إلى حل معادلة من الدرجة الثانية.	ـ نتطرق إلى الجذرين التربيعيين لعدد مركب. تقدم المساعدة المناسبة للتلميذ لحل هذا النوع من المعادلات.
الأعداد المركبة والتحويلات النقطية من الشكل: $M(z) \mapsto M'(z')$ مع $z' = az + b$ و $a \in \mathbb{R}^*$ أو $a \in \mathbb{C}$ و $\|a\| = 1$.	ـ تعيين الكتابة المركبة للتحويلات المألوفة (الانسحاب،الدوران والتحاكي). ـ التعرف عن تحويل انطلاقا من كتابته المركبة. ـ حل مسائل هندسية تتطلب استعمال انسحابات، تحاكيات أو دورانات بواسطة الأعداد المركبة. ـ توظيف الأعداد المركبة لبرهان خواص الانسحاب، الدوران والتحاكي.	نبرر الكتابة المختصرة $(z' - z_0) = k(z - z_0)$ لكل من التحاكي والدوران. تعالج مسائل هندسية يتم فيها برهان خواص هذه التحويلات كحفظ الاستقامية، التوازي، المرجح؛ ... ، التأثير على الأطوال والمساحات؛ ... يمكن في هذه الفقرة الاعتماد على تمييز الدائرة وتمييز نصف المستقيم المشار إليهما أعلاه.

الأعداد المركبة

نشاط 1: نذكر في ما يلي المجموعات الجزئية للمجموعة $\mathbb{R}$: $\mathbb{N}$ ، $\mathbb{Z}$ ، $\mathbb{Q}$.

1) عين القيم الممكنة للعدد الحقيقي a حتى يكون للمعادلة $x^2+a=0$ على الأقل حلا في $\mathbb{R}$.

2) عين أصغر مجموعة التي ينتمي إليها حلي المعادلة $x^2+a=0$ في كل حالة من الحالات التالية:

$a=-4$ ؛ $a=-\frac{4}{9}$ ؛ $a=-5$.

3) نفرض أن $a>0$ ، نعلم أن المعادلة $x^2+a=0$ لا تقبل حلا في $\mathbb{R}$.

نعتبر المجموعة $\mathbb{C}$ حيث $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ وكل خواص العمليات المعروفة في $\mathbb{R}$ توظف بنفس الطريقة في المجموعة $\mathbb{C}$.

ولنتخيل عنصرا i من $\mathbb{C}$ يحقق $i^2=-1$.

. برّر أن i ليس عددا حقيقيا.

. بين أن $i\sqrt{a}$ و $-i\sqrt{a}$ ينتميان إلى $\mathbb{C}$ ثم تحقق أنهما حلان للمعادلة $x^2+a=0$.

4) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلتين: $x^2+x-1=0$ ؛ $x^2+x+1=0$.

حل النشاط:

1) $x^2+a=0$ معناه $x^2=-a$ ، يكون للمعادلة $x^2+a=0$ على الأقل حلا في $\mathbb{R}$ معناه $a\le 0$ أي $a\in\mathbb{R}_-$.

2) $a=-4$ ؛ المعادلة هي $x^2-4=0$ وتعني $x=2$ أو $x=-2$ ومنه الحلان ينتميان إلى $\mathbb{Z}$.

$a=-\frac{4}{9}$ ؛ المعادلة هي $x^2-\frac{4}{9}=0$ وتعني $x=\frac{2}{3}$ أو $x=-\frac{2}{3}$ ومنه الحلان ينتميان إلى $\mathbb{Q}$.

$a=-5$ ؛ المعادلة هي $x^2-5=0$ وتعني $x=\sqrt{5}$ أو $x=-\sqrt{5}$.

3) نفرض أن $a>0$ ، نعلم أن المعادلة $x^2+a=0$ لا تقبل حلا في $\mathbb{R}$.

نعتبر المجموعة $\mathbb{C}$ حيث $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ وكل خواص العمليات المعروفة في $\mathbb{R}$ توظف بنفس الطريقة في المجموعة $\mathbb{C}$.

ولنتخيل عنصرا i من $\mathbb{C}$ يحقق $i^2=-1$.

. إذا افترضنا أن $i\in\mathbb{R}$ فإن $i^2\in\mathbb{R}_+$ وهذا تناقض إذن الافتراض خاطئ وبالتالي i ليس عددا حقيقيا.

. بين أن $i\sqrt{a}$ و $-i\sqrt{a}$ ينتميان إلى $\mathbb{C}$ ثم تحقق أنهما حلان للمعادلة $x^2+a=0$.

4) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلتين: $x^2+x-1=0$ ؛ $x^2+x+1=0$.

$x^2+x-1=0$ ؛ $\Delta=5$ ومنه $x'=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ و $x''=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

$x^2+x+1=0$ ؛ $\Delta=-3=3i^2$ ومنه $x'=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ و $x''=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

1) مجموعة الأعداد المركبة

التعريف 1: نسمي المجموعة $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة عناصرها من الشكل $z=a+bi$ حيث a و b عددان حقيقيان و $i^2=-1$.

الكتابة $z=a+bi$ تسمى الشكل الجبري للعدد المركب z ؛ وهي الكتابة الوحيدة.

العدد الحقيقي a يسمى الجزء الحقيقي للعدد المركب z والعدد الحقيقي b يسمى جزءه التخيلي ونكتب $a=\text{Re}(z)$ و $b=\text{Im}(z)$

ملاحظات:

إذا كان $b=0$ فإن $z=a$ وهو عدد حقيقي إذن $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$.

إذا كان $a=0$ فإن $z=bi$ هو ليس حقيقيا ويسمى عددا مركبا تخيليا صرفا (بحتا)

إذا كان $a=0$ و $b=0$ فإن $z=0$ عدد مركب معدوم.

تطبيق 1 صفحة 144: عين $\text{Re}(z)$ و $\text{Im}(z)$ في كل حالة من الحالات التالية :

$z=3+2i$ ؛ $z=-1+3i$ ؛ $z=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ؛ $z=i-3\sqrt{2}$ ؛ $z=\sqrt{5}+\sqrt{7}$ ؛ $z=-i\sqrt{3}$.

حل التطبيق: $\operatorname{Re}(3+2i)=3$ ؛ $\operatorname{Im}(3+2i)=2$ ؛ $\operatorname{Re}(-1+3i)=-1$ ؛ $\operatorname{Im}(-1+3i)=3$ ؛ $\operatorname{Re}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ؛ $\operatorname{Im}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=0$ ؛ $\operatorname{Re}\left(i-3\sqrt{2}\right)=-3\sqrt{2}$ ؛ $\operatorname{Im}\left(i-3\sqrt{2}\right)=1$ ؛ $\operatorname{Re}\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)=\sqrt{5}+\sqrt{7}$ ؛ $\operatorname{Im}\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)=0$ ؛ $\operatorname{Re}\left(-i\sqrt{3}\right)=0$ ؛ $\operatorname{Im}\left(-i\sqrt{3}\right)=-\sqrt{3}$.

تمرين: ليكن $z=2+3i$ ؛ $z'=i-5$. أكتب الأعداد المركبة التالية على الشكل الجبري: $z+z'$ ؛ $z-z'$ ؛ $2z-3z'$ ؛ zz' ؛ z^2 .

حل التمرين: $z+z'=-3+4i$ ؛ $z-z'=(2+3i)-(i-5)=7+2i$ ؛ $2z-3z'=4+6i-3i+15=19+3i$ ؛ $zz'=(2+3i)(i-5)=2i-10-3-15i=-13-13i$ ؛ $z^2=4+12i-9=-5+12i$.

تمرين 86 صفحة 150: حل في المجموعة $\mathbb{C}^2$ الجمل ذات المجهول $(z\,;z')$ التالية :

أ- $\begin{cases}3z+z'=2-5i\\ z-z'=-2+i\end{cases}$. ب- $\begin{cases}3z+z'=5+2i\\ z+z'=1-2i\end{cases}$. جـ- $\begin{cases}2iz+z'=2i\\ 3z-iz'=1\end{cases}$.

حل التمرين: أ- $\begin{cases}3z+z'=2-5i\\ z-z'=-2+i\end{cases}$ معناه $\begin{cases}4z=-4i\\ z'=z+2-i\end{cases}$ أي $\begin{cases}z=-i\\ z'=2-2i\end{cases}$.

ب- $\begin{cases}3z+z'=5+2i\\ z+z'=1-2i\end{cases}$ معناه $\begin{cases}2z=4+4i\\ z'=1-2i-z\end{cases}$ أي $\begin{cases}z=2+2i\\ z'=-1-4i\end{cases}$.

جـ- $\begin{cases}2iz+z'=2i\\ 3z-iz'=1\end{cases}$ معناه $\begin{cases}i(2iz+z')=i\times 2i\\ 3z-iz'=1\end{cases}$ ومعناه $\begin{cases}-2z+iz'=-2\\ 3z-iz'=1\end{cases}$ أي $\begin{cases}z=-1\\ z'=2i-2iz=4i\end{cases}$.

تمرين 88 صفحة 150: برّر أن العددين $(1+i)^8$ و $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2008}$ حقيقيان.

حل التمرين: $(1+i)^8=\left[(1+i)^2\right]^4=\left[(2i)^2\right]^2=16$ ؛ $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2008}=\left[\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right]^{1004}=\left(\frac{-2i}{2}\right)^{1004}=\left[(-i)^2\right]^{502}=1$.

خاصية: يتساوى عددان مركبان إذا وفقط إذا كان لهما نفس الجزء الحقيقي ونفس الجزء التخيلي.

أي إذا كانت a ، b ، ~ و ~ أعداد حقيقية لدينا: $a+bi=\sim+\ \ i$ تكافئ $(a;b)=(\sim;\ \ )$ وتكافئ $a=\sim$ و $b=$.

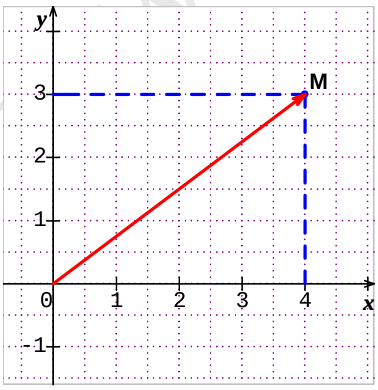
تطبيق 3 صفحة 144: z عدد مركب حيث: $z=\left(x^2+x\right)+i\left(x^2+y-1\right)$.

عين العددين الحقيقيين x و y حتى يكون العدد المركب z معدوما.

حل التطبيق: $z=0$ معناه $\operatorname{Re}(z)=0$ و $\operatorname{Im}(z)=0$ معناه $x^2+x=0$ و $x^2+y-1=0$ أي $x(x+1)=0$ و $y=1-x^2$.

لدينا $x(x+1)=0$ معناه $x=0$ أو $x=-1$. إذا كان $x=0$ فإن $y=1$ وإذا كان $x=-1$ فإن $y=0$ وبالتالي:

$z=0$ معناه $(x;y)=(0;1)$ أو $(x;y)=(-1;0)$.



تعريف 2: المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$.

لكل نقطة $M(x;y)$ من المستوي نرفق العدد المركب $z=x+iy$.

نقول أن النقطة M هي صورة العدد المركب z

أو الشعاع $\overrightarrow{OM}$ هو الصورة الشعاعية للعدد المركب z .

z يسمى لاحقة النقطة M أو لاحقة الشعاع $\overrightarrow{OM}$.

تطبيق 4 صفحة 144: 1) عين إحداثيتي النقطة D ذات اللاحقة $z_D=\sqrt{3}+3i$.

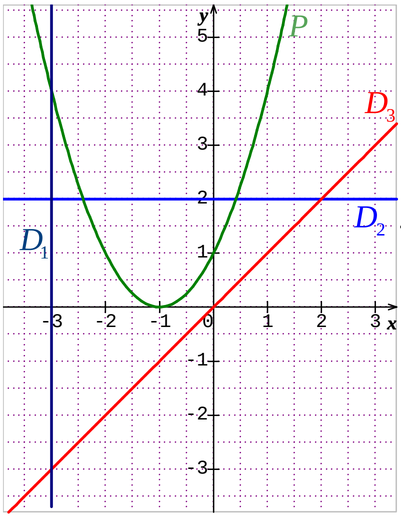
2) عين اللواحق z_A، z_B و z_C للنقط $A\left(\sqrt{3};1\right)$ ، $B\left(-\sqrt{3};-1\right)$ و $C\left(0;2\right)$ على الترتيب.

حل التطبيق: 1) $D\left(\sqrt{3};3\right)$.

2) تعيين اللواحق: $z_A=\sqrt{3}+i$ ، $z_B=-\sqrt{3}-i$ و $z_C=2i$.

تمرين 90 صفحة 151: في كل حالة من الحالات التالية ، مثل مجموعة النقط M ذات اللاحقة العدد المركب z الذي يحقق المساواة المقترحة: **أ ـ** $\mathrm{Re}(z)=-3$. **ب ـ** $\mathrm{Im}(z)=2$. **جـ ـ** $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Im}(z)$.

د ـ $\left[\mathrm{Re}(z+1)\right]^2-\mathrm{Im}(z-2)=0$.



حل التمرين: نعتبر العدد المركب $z=x+iy$ مع x و y عددين مركبين.

أ ـ $\mathrm{Re}(z)=-3$ معناه $x=-3$ إذن مجموعة النقط M هي المستقيم D_1 ذو المعادلة $x=-3$.

ب ـ $\mathrm{Im}(z)=2$ معناه $y=2$ إذن مجموعة النقط M هي المستقيم D_2 ذو المعادلة $y=2$.

جـ ـ $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Im}(z)$ معناه $y=x$ إذن مجموعة النقط M هي المنصف الأول D_3 .

د ـ $\left[\mathrm{Re}(z+1)\right]^2-\mathrm{Im}(z-2)=0$ معناه $(x+1)^2=y$ إذن مجموعة النقط M هي القطع المكافئ P .

تمرين 96 صفحة 151: نرفق بكل نقطة $M\left(x;y\right)$ ذات اللاحقة z ، النقطة $M'\left(x';y'\right)$ ذات اللاحقة z' حيث: $z'=z^2-2(1+i)z$.

1) عبر عن x' و y' بدلالة x و y .

2) $\mathscr{H}$ هي مجموعة النقط M بحيث يكون z' حقيقيا . برهن أن $\mathscr{H}$ هي منحني دالة h يطلب تعيينها .

حل التمرين: 1) لدينا: $z=x+iy$ و $z'=x'+iy'$. $z'=z^2-2(1+i)z$ معناه $x'+iy'=(x+iy)^2-2(1+i)(x+iy)$

ومعناه $x'+iy'=x^2-y^2+2ixy-2x-2iy-2ix+2y=x^2-y^2-2x+2y+2(xy-y-x)i$.

إذن $x'=x^2-y^2-2x+2y$ و $y'=2(xy-y-x)$.

2) z' حقيقي معناه $y'=0$ ومعناه $xy-y-x=0$ أي $y(x-1)=x$ ؛ إذا كان $x=1$ فإن $0=1$ وهذا تناقض إذن $x\neq 1$

وبالتالي $y=\dfrac{x}{x-1}$ وهي معادلة المنحنى $\mathscr{H}$ للدالة $f:x\mapsto \dfrac{x}{x-1}$.

خواص:

1) M و M' نقطتان من المستوي لاحقتاهما على الترتيب $z=a+bi$ و $z'=a'+b'i$ المكتوبان على الشكل الجبري

* لاحقة الشعاع $\overrightarrow{MM'}$ هي العدد المركب $z'-z=a'-a+(b'-b)i$.

* $OM=\left\|\overrightarrow{OM}\right\|=\sqrt{a^2+b^2}$ و $MM'=\left\|\overrightarrow{MM'}\right\|=\sqrt{(a'-a)^2+(b'-b)^2}$.

* لاحقة منتصف القطعة $[MM']$ هي العدد المركب $\dfrac{z+z'}{2}$.

2) لاحقة المرجح G للجملة $\{(A;\sim);(B;\ );(C;¥)\}$ هي العدد المركب $z_G=\dfrac{\sim z_A+\ z_B+¥ z_C}{\sim+\ +¥}$.

3) $\vec{P}$ و $\vec{Q}$ شعاع من المستوي لاحقتاهما z و z' على الترتيب؛ k عدد حقيقي.

* لاحقة الشعاع $\vec{P}+\vec{Q}$ هي العدد المركب $z+z'$.

* لاحقة الشعاع $k.\vec{P}$ هي العدد المركب kz .

تمرين 91 صفحة 151: z عدد مركب . A ، M و M' نقط من المستوي لواحقها 1 ، z و z^2 على الترتيب .

عين مجموعة النقط M حتى تكون النقط A ، M و M' في استقامية.

حل التمرين: $z^2-1=k(z-1)$ معناه $(z-1)(z+1-k)=0$ ومعناه $z=1$ أو $z=k-1$ مع $k\in\mathbb{R}$ أي $M(1;0)$ أو $M(k';0)$ مع $k'\in\mathbb{R}$.

مجموعة النقط M حتى تكون النقط A ، M و M' في استقامية هي حامل محور الفواصل.

طريقة أخرى: بوضع $z=x+iy$ لدينا لاحقة $\overrightarrow{AM}$ هي $z-1=x-1+iy$ ولاحقة $\overrightarrow{AM'}$ هي $z^2-1=x^2-y^2-1+2ixy$

$\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AM'}$ مرتبطان خطيا معناه $\text{Re}(z-1)\text{Im}(z^2-1)=\text{Im}(z-1)\text{Re}(z^2-1)$ ومعناه

$(x-1)\times 2xy=y(x^2-y^2-1)$ ومعناه $y(x^2+y^2-2x+1)=0$ أي $y=0$ أو $(x-1)^2+y^2=0$ ويكافئ $y=0$ أو $(x;y)=(1;0)$ إذن مجموعة النقط M حتى تكون النقط A ، M و M' في استقامية هي حامل محور الفواصل.

تمرين 95 صفحة 151: A ، B و C نقط من المستوي المركب لواحقها $3i$ ، $-3i$ و $2-3i$ على الترتيب.

1) عين لاحقة النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,2);(C,-2)\}$.

2) عين مجموعة النقط M من المستوي التي يكون من أجلها $AM^2+2BM^2-2CM^2=25$.

حل التمرين: 1) $z_G=\dfrac{z_A+2z_B-2z_C}{1+2-2}=3i-6i-4+6i=-4+3i$.

2) $AM^2+2BM^2-2CM^2=25$ معناه $\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GM}\right)^2+2\left(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GM}\right)^2-2\left(\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GM}\right)^2=25$ ومعناه

$\overrightarrow{GM}^2+\overrightarrow{AG}^2+2\overrightarrow{BG}^2-2\overrightarrow{CG}^2+2\overrightarrow{GM}\left(\overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{BG}-2\overrightarrow{CG}\right)=25$ أي $\overrightarrow{GM}^2=25-\overrightarrow{AG}^2-2\overrightarrow{BG}^2+2\overrightarrow{CG}^2$

لدينا: $AG^2=(-4)^2+(3-3)^2=16$ ، $BG^2=(-4)^2+(3+3)^2=52$ ، $CG^2=(-4-2)^2+(3+3)^2=72$ ؛ إذن

$GM^2=25-16-2\times52+2\times72=49$ ومعناه أن $GM=7$ إذن مجموعة النقط M هي الدائرة ذات المركز G ونصف القطر 7.

نشاط 2: المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. $M(x;y)$ نقطة من المستوي لاحقتها العدد المركب z.

M' نظيرة M بالنسبة إلى محور الفواصل ؛ نرمز بـ: $\bar{z}$ للاحقة النقطة M'.

1) أكتب z و $\bar{z}$ على الشكل الجبري ثم أحسب $z+\bar{z}$ ؛ $z-\bar{z}$ و $z\bar{z}$.

2) اجعل مقام العدد المركب $\dfrac{1+i}{2+3i}$ عددا حقيقيا ثم أكتبه على الشكل الجبري.

حل النشاط 2: 1) لدينا $M(x;y)$ ومنه $M'(x;-y)$ وبالتالي $z=x+iy$ و $\bar{z}=x-iy$.

$z+\bar{z}=2x$ ؛ $z-\bar{z}=2iy$ و $z\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2-(iy)^2=x^2+y^2$.

2) $\dfrac{1+i}{2+3i}=\dfrac{(1+i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=\dfrac{2-3i+2i+3}{4+9}=\dfrac{5}{13}-\dfrac{1}{13}i$

2) مرافق عدد مركب

التعريف: z عدد مركب مكتوب في الشكل الجبري $a+bi$.

مرافق العدد المركب z هو عدد المركب $a-bi$ ونرمز له بـ: $\bar{z}$.

تطبيق 7 صفحة 144: أعط مرافق لكل من الأعداد المركبة التالية: $z_1=2+4i$ ؛ $z_2=3-i$ ؛ $z_3=i\sqrt{2}-3$ ؛ $z_4=-\dfrac{5}{2}i$.

حل التطبيق: $\overline{z_1}=2-4i$ ؛ $\overline{z_2}=3+i$ ؛ $\overline{z_3}=-3-i\sqrt{2}$ ؛ $\overline{z_4}=\dfrac{5}{2}i$.

ملاحظات:

* النقطتان M_z و $M_{\bar{z}}$ صورتا العددين المركبين المترافقين، هما متناظرتان بالنسبة لمحور الفواصل.

* إذا كان $z=a+bi$ فإن $z\bar{z}=a^2+b^2$ وهو عدد حقيقي موجب نستعمله خاصة في كتابة الكسور على شكلها الجبري.

تطبيق 11 صفحة 144: أكتب الأعداد المركبة التالية على شكلها الجبري .

$z_1=\dfrac{4-6i}{3+2i}$ ؛ $z_2=\dfrac{5+15i}{1+2i}$ ؛ $z_3=\dfrac{1+i}{3-i\sqrt{2}}$ ؛ $z_4=\dfrac{1+i}{1-i}$.

حل التطبيق: $z_1=\dfrac{4-6i}{3+2i}=\dfrac{(4-6i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}=\dfrac{-30}{13}i$ ؛ $z_2=\dfrac{5+15i}{1+2i}=\dfrac{(5+15i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\dfrac{35+5i}{5}=7+i$ ؛

$z_3=\dfrac{1+i}{3-i\sqrt{2}}=\dfrac{(1+i)(3+i\sqrt{2})}{(3-i\sqrt{2})(3+i\sqrt{2})}=\dfrac{3-\sqrt{2}+(3+\sqrt{2})i}{11}=\dfrac{3-\sqrt{2}}{11}+\dfrac{3+\sqrt{2}}{11}i$ ؛

$z_4=\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{1-1+2i}{2}=i$.

نتائج: من أجل كل عدد مركب z . $\bar{\bar{z}}=z$ ؛ $\operatorname{Re}(z)=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$ و $\operatorname{Im}(z)=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$.

z حقيقي معناه $z=\bar{z}$ و z تخيلي صرف معناه $z=-\bar{z}$.

خواص: من أجل كل عددين مركبين z و z' لدينا:

$\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z'}$ ؛ $\overline{z\times z'}=\bar{z}\times\bar{z'}$ ؛ $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}=\dfrac{1}{\bar{z}}$ مع $z\neq 0$ ؛ $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}=\dfrac{\bar{z}}{\bar{z'}}$ مع $z'\neq 0$.

تطبيق 14 صفحة 144: نضع : $z_1=\dfrac{3-i}{2+5i}$ و $z_2=\dfrac{3+i}{2-5i}$.

1) بدون إجراء الحساب برر أن z_1+z_2 هو عدد حقيقي و z_1-z_2 هو عدد تخيلي صرف .

2) أحسب z_1+z_2 و z_1-z_2 ثم استنتج الشكل الجبري للعدد المركب z_1 .

حل التطبيق: 1) لدينا $\bar{z_1}=\overline{\left(\dfrac{3-i}{2+5i}\right)}=\dfrac{\overline{3-i}}{\overline{2+5i}}=\dfrac{3+i}{2-5i}=z_2$ إذن $z_1+z_2=z_1+\bar{z_1}=2\operatorname{Re}(z_1)$ وهو عدد حقيقي.

$z_1-z_2=z_1-\bar{z_1}=2i\operatorname{Im}(z_1)$ وهو تخيلي صرف.

2) $z_1+z_2=\dfrac{3-i}{2+5i}+\dfrac{3+i}{2-5i}=\dfrac{(3-i)(2-5i)+(3+i)(2+5i)}{(2+5i)(2-5i)}=\dfrac{1-17i+1+17i}{29}=\dfrac{2}{29}$

$z_1-z_2=\dfrac{3-i}{2+5i}-\dfrac{3+i}{2-5i}=\dfrac{(3-i)(2-5i)-(3+i)(2+5i)}{(2+5i)(2-5i)}=\dfrac{1-17i-1-17i}{29}=-\dfrac{34}{29}i$

نستنتج من 1) أن $\operatorname{Re}(z_1)=\dfrac{1}{29}$ و $\operatorname{Im}(z_1)=-\dfrac{17}{29}$ وبالتالي $z_1=\dfrac{1}{29}-\dfrac{17}{29}i$

تطبيق 17 صفحة 144: أكتب بدلالة $\bar{z}$ ، مرافق الأعداد المركبة Z التالية :

أـ $Z=2+3iz$. **ب**ـ $Z=(2+iz)(1+3z)$. **جـ**ـ $Z=\dfrac{2+iz}{z+2}$. **د**ـ $Z=z^3-iz^2+3z-3i$.

حل التطبيق:

أـ $\bar{Z}=\overline{2+3iz}=\bar{2}+\overline{3iz}=2+\overline{3i}\times\bar{z}=2-3i\bar{z}$. **ب**ـ $\bar{Z}=\left(\overline{2+iz}\right)\left(\overline{1+3z}\right)=\left(2-i\bar{z}\right)\left(1+3\bar{z}\right)$.

جــ $\bar{Z}=\dfrac{\overline{2+iz}}{\overline{z+2}}=\dfrac{2-i\bar{z}}{\bar{z}+2}$. **د**ـ $\bar{Z}=\bar{z}^3+i\bar{z}^2+3\bar{z}+3i$.

تمرين 97 صفحة 152: $z=x+iy$ عدد مركب مع x و y عددين حقيقيين . نضع $\sim=z-2\bar{z}+2+3i$.

1) أحسب بدلالة x و y الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للعدد المركب ~ .

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $\sim = 0$ ، ذات المجهول z .

حل التمرين:

1) $\sim = z - 2\bar{z} + 2 + 3i = x + iy - 2(x - iy) + 2 + 3i = (-x+2) + (3y+3)i$

إذن $\mathrm{Re}(\sim) = 2 - x$ و $\mathrm{Im}(\sim) = 3(y+1)$

2) $\sim = 0$ معناه $\mathrm{Re}(\sim) = 0$ و $\mathrm{Im}(\sim) = 0$ ومعناه $x = 2$ و $y = -1$ أي $z = 2 - i$.

تمرين 109 صفحة 152: z عدد مركب يختلف عن 1 ، صورته النقطة M في المستوي المركب .

نضع $L = \frac{z+1}{z-1}$ و M' صورة العدد المركب L. عين مجموعة النقط M في كل حالة من الحالات التالية :

أـ يكون L عددا حقيقيا .

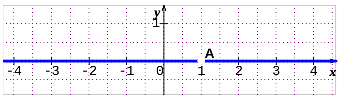
ب ـ يكون L عددا تخيليا صرفا .

جـ ـ تكون النقط O ، M و M' في استقامية.

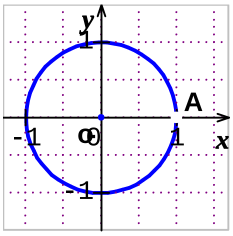
حل التمرين: نضع $z = x + iy$ معناه $M(x;y)$. $L = \frac{z+1}{z-1} = \frac{x+iy+1}{x+iy-1} = \frac{(x+1+iy)(x-1-iy)}{(x-1+iy)(x-1-iy)}$

أي $L = \frac{x^2 - x - ixy + x - 1 - iy + ixy - iy + y^2}{(x-1)^2 + y^2} = \frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2} + \frac{-2iy}{(x-1)^2+y^2}$

أـ L عدد حقيقي معناه $\mathrm{Im}(z) = 0$ ومعناه $\frac{-2y}{(x-1)^2+y^2} = 0$ أي $y = 0$ و $(x;y) \neq (1;0)$؛



إذن مجموعة النقط M التي يكون L عددا حقيقيا هي حامل محور الفواصل باستثناء النقطة $A(1;0)$.

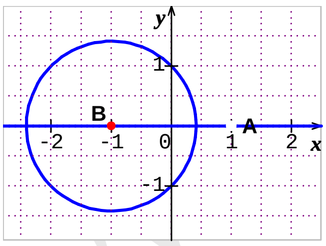


ب ـ L عدد تخيلي صرف معناه $\mathrm{Re}(z) = 0$ ومعناه. $\frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2} = 0$

أي $x^2 + y^2 = 1$ و $(x;y) \neq (1;0)$؛ إذن مجموعة النقط M التي يكون L عددا تخيليا صرفا هي

الدائرة ذات المركز O ونصف القطر 1 باستثناء النقطة $A(1;0)$.

جـ ـ تكون النقط O ، M و M' في استقامية معناه $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{OM'}$ مرتبطان خطيا ومعناه $\frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2}\, y = \frac{-2y}{(x-1)^2+y^2}\, x$



يكافئ $y(x^2+y^2+2x-1) = 0$ و $(x;y) \neq (1;0)$

أي $x^2+y^2+2x-1 = 0$ أو $y = 0$ و $(x;y) \neq (1;0)$

ولدينا $x^2+y^2+2x-1 = 0$ معناه $(x+1)^2 + y^2 = 2$

إذن مجموعة النقط M التي من أجلها تكون النقط O ، M و M' في استقامية هي

إتحاد حامل محور الفواصل والدائرة ذات المركز $\Omega(-1;0)$ ونصف القطر $\sqrt{2}$ باستثناء النقطة $A(1;0)$.

طريقة أخرى: **أـ** L عدد حقيقي معناه $\bar{L} = L$ ومعناه $\frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1} = \frac{z+1}{z-1}$ ويكافئ $\bar{z}z - \bar{z} + z - 1 = \bar{z}z + \bar{z} - z - 1$ ومعناه

$2z = 2\bar{z}$ معناه $z = \bar{z}$ أي z عدد حقيقي وبالتالي مجموعة النقط M هي حامل محور الفواصل باستثناء النقطة ذات اللاحقة 1.

ب ـ L عدد تخيلي صرف معناه $\bar{L} = -L$ ومعناه $\bar{z}z - \bar{z} + z - 1 = -\bar{z}z - \bar{z} + z + 1$ أي $\bar{z}z = 1$ ومعناه $x^2 + y^2 = 1$

وبالتالي مجموعة النقط M هي الدائرة ذات المركز O مبدأ المعلم ونصف قطرها 1 باستثناء النقطة ذات اللاحقة 1.

طويلة وعمدة عدد مركب

نشاط: (نشاط الأول صفحة)

دراسة مثال $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ معلم متعامد متجانس مباشر من المستوي.

A و B النقطتان من المستوي التي إحداثياتها القطبية $\left(2,\frac{\pi}{4}\right)$ و $\left(\frac{1}{2},\frac{2\pi}{3}\right)$ على الترتيب في المعلم $\left(O;\vec{i}\right)$.

1) أنشئ النقطتين A و B .

2) عين قيسا للزاوية $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$.

3) عين الإحداثيات الديكارتية للنقطتين A و B .

4) A' نظيرة A بالنسبة إلى O مبدأ المعلم . عين الإحداثيات الديكارتية والقطبية للنقطة A' .

5) B' نظيرة B بالنسبة إلى حامل محور الفواصل . عين الإحداثيات الديكارتية والقطبية للنقطة B' .

6) $B"$ نظيرة B بالنسبة إلى حامل محور التراتيب . عين الإحداثيات الديكارتية والقطبية للنقطة $B"$.

الحالة العامة $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ معلم متعامد متجانس مباشر من المستوي.

M نقطة من المستوي تختلف عن O إحداثياها القطبية $\left(r,\theta\right)$ في المعلم $\left(O;\vec{i}\right)$.

1) عين شرطا على r كي تكون النقطة M تنتمي إلى الدائرة التي نصف قطرها 3 .

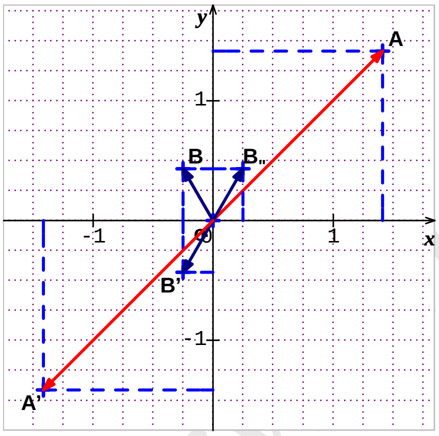
2) عين شرطا على θ كي تكون النقطة M تنتمي إلى حامل محور التراتيب .

3) عين شرطا على θ كي تكون النقطة M تنتمي إلى حامل محور الفواصل .

4) عين شرطا على θ كي تكون النقطة M تنتمي إلى المستقيم ذي المعادلة $y=x$.

حل النشاط:

دراسة مثال 1) إنشاء النقطتين A و B.



الإحداثيتين القطبيتين لـ A هما $\left(2;\frac{\pi}{4}\right)$ إذن $OA=2$ و $\left(\vec{i};\overrightarrow{OA}\right)=\frac{\pi}{4}$

وكذلك الإحداثيتين القطبيتين لـ B هما $\left(\frac{1}{2};\frac{2\pi}{3}\right)$ إذن $OB=\frac{1}{2}$ و $\left(\vec{i};\overrightarrow{OB}\right)=\frac{2\pi}{3}$.

2) $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)=\left(\vec{i};\overrightarrow{OB}\right)-\left(\vec{i};\overrightarrow{OA}\right)=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{12}$

3) الإحداثيات الديكارتية للنقطتين A و B:

$x_A=OA\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$ و $y_A=OA\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$ ؛ إذن $A\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$.

$x_B=OB\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{4}$ و $y_A=OA\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}$ ؛ إذن $B\left(-\frac{1}{4};\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

3) A' نظيرة A بالنسبة إلى O مبدأ المعلم. لدينا $A\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$ ومنه $A'\left(-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$ و $A'\left(2;\frac{\pi}{4}+\pi\right)$.

4) B' نظيرة B بالنسبة إلى حامل محور الفواصل. لدينا $B\left(-\frac{1}{4};\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ ومنه $B'\left(-\frac{1}{4};-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ و $B'\left(\frac{1}{2};-\frac{2\pi}{3}\right)$.

5) $B"$ نظيرة B بالنسبة إلى حامل محور التراتيب. الإحداثيات الديكارتية $B"\left(\frac{1}{4};\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ والقطبية $B"\left(\frac{1}{2};\frac{\pi}{3}\right)$.

الحالة العامة $(O;\vec{i};\vec{j})$ معلم متعامد متجانس مباشر من المستوي. M نقطة من المستوي تختلف عن O، إحداثياها القطبية $(r;¯)$ في المعلم $(O;\vec{i})$

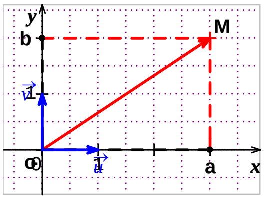
1) لدينا $OM=r$ ولكي تكون M تنتمي إلى الدائرة التي نصف قطرها 3 يجب إذن $r=3$.

2) تكون النقطة M تنتمي إلى حامل محور التراتيب معناه $¯=\frac{®}{2}+k®$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

3) تكون النقطة M تنتمي إلى حامل محور الفواصل معناه $¯=k®$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

4) تكون النقطة M تنتمي إلى المستقيم ذي المعادلة $y=x$ معناه $¯=\frac{®}{4}+k®$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

1) طويلة عدد مركب



التعريف: z عدد مركب صورته النقطة M في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

المسافة OM تسمى طويلة العدد المركب z ونرمز إليها بالرمز $|z|$.

لدينا $|z|=OM=\|\overrightarrow{OM}\|$ وإذا كان $z=a+bi$ فإن $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

تطبيق 30 صفحة 146: z_A، z_B، z_C و z_D هي على الترتيب، لواحق النقط $A(\sqrt{3};1)$، $B(-\sqrt{3};-1)$، $C(0;2)$، $D(\sqrt{3};3)$.

1) أحسب $|z_A|$ ، $|z_B|$ و $|z_C|$. ماذا يمكنك أن تستنتج ؟

2) ما هي طبيعة الرباعي $AOCD$ ؟

حل التطبيق

1) $|z_A|=OA=\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}=\sqrt{4}=2$ ، $|z_B|=OB=\sqrt{3+1}=2$ و $|z_C|=OC=\sqrt{0+4}=2$.

نستنتج أن النقط A، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز O ونصف القطر 2.

2) لدينا $CD=|z_D-z_C|=\sqrt{(\sqrt{3}-0)^2+(3-2)^2}=2$ ؛ $AD=|z_D-z_A|=\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{3})^2+(3-1)^2}=2$ ؛ إذن

$AO=OC=CD=DA=2$ وبالتالي الرباعي $AOCD$ هو معين.

ملاحظات:

إذا كان $z=a$ (حقيقي) فإن $|z|=|a|$ الطويلة هي القيمة لمطلقة

إذا كان $z=bi$ (تخيلي صرف) فإن $|z|=|b|$

خواص الطويلة: $z\bar{z}=|z|^2$ ؛ $|\bar{z}|=|z|=|-z|$ ؛ $|zz'|=|z|\times|z'|$ ؛ $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$ مع $z'\neq 0$ ؛ $|z+z'|\leq|z|+|z'|$

نتيجة: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n لدينا $|z^n|=|z|^n$.

تمرين 35 صفحة 146: يعطى العدد المركب ~ حيث : $~=\sqrt{2-\sqrt{2}}-i\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

1) أحسب $~^2$ ثم $~^4$.

2) أحسب $|~^4|$ ثم استنتج $|~|$.

3) المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس. عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة العدد المركب z حيث $|~z|=6$.

حل التمرين: 1) $~^2=\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}-i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2=2-\sqrt{2}-2-\sqrt{2}-2i\sqrt{4-2}=-2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}=-2\sqrt{2}(1+i)$

$~^4=\left[-2\sqrt{2}(1+i)\right]^2=8\times 2i=16i$

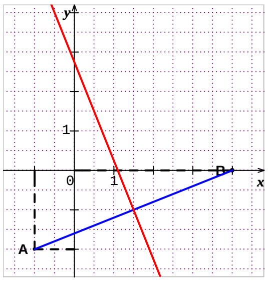
2) $|~^4|=16$ بما أن $|~^4|=|~|^4$ فإن $|~|^4=2^4$ ومنه $|~|=2$.

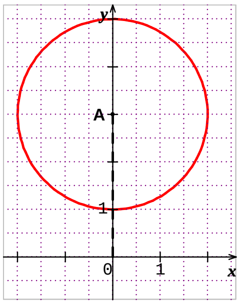
3) $|~z|=6$ معناه $|~|\times|z|=6$ ومعناه $|z|=3$ أي $OM=3$ إذن مجموعة النقط M هي الدائرة ذات المركز O ونصف قطر 2.

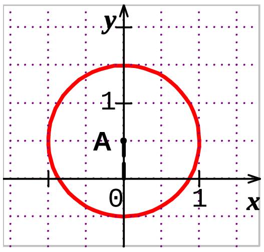
تمرين 34 صفحة 146: عيّن ثمّ مثّل مجموعة النقط M ذات اللاحقة المركب z الذي يحقق المساواة المقترحة.

أ ـ $|z+1+2i|=|z-4|$. **ب ـ** $|z-3i|=2$. **جـ ـ** $|2z-i|=2$.

حل التمرين:







أ ـ $|z+1+2i|=|z-4|$. نعتبر النقطتين $A(-1;-2)$ و $B(4;0)$ ولدينا:

$|z+1+2i|=|z-4|$ معناه $|z-z_A|=|z-z_B|$ ومعناه $AM=BM$

أي مجموعة النقط M هي محور القطعة $[AB]$.

ب ـ $|z-3i|=2$. نعتبر النقطة $A(0;3)$ ؛ $|z-3i|=2$ معناه $AM=2$

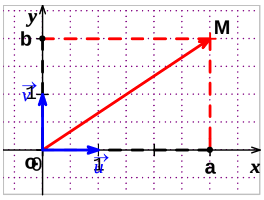
أي مجموعة النقط M هي الدائرة ذات المركز A ونصف القطر 2.

جـ ـ $|2z-i|=2$ معناه $2\left|z-\frac{1}{2}i\right|=2$ ومعناه $\left|z-\frac{1}{2}i\right|=1$ أي $AM=1$

إذن مجموعة النقط M هي الدائرة ذات المركز $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$ ونصف القطر 1.

2) عمدة عدد مركب غير معدوم

التعريف: z عدد مركب غير معدوم صورته النقطة M في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.



نسمي عمدة للعدد المركب z كل قيسا للزاوية $(\vec{u};\overrightarrow{OM})$ ونرمز لها بـ $Arg(z)$.

إذا كان ¯ أحد أقياس الزاوية $(\vec{u};\overrightarrow{OM})$ فإن $Arg(z)=¯+2k®$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

ملاحظات:

* إذا كان z عداد مركبا معدوما فإن عمدته غير معينة.

* A و B نقطتان من المستوي تختلفان عن المبدأ O؛ $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})=Arg(z_B)-Arg(z_A)+2k®$.

* $Arg(\bar{z})=-Arg(z)+2k®$ ؛ $Arg(-z)=Arg(z)+k®$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

تطبيق: المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

1) نعتبر العدد المركب $z_A=\sqrt{3}+i$ صورته النقطة A. مثل النقطة A وأحسب طويلة العدد المركب z_A واستنتج عمدة له.

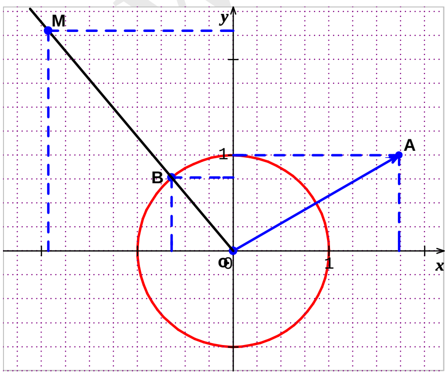
2) نعتبر في الدائرة المثلثية المنسوبة إلى المعلم $(O;\vec{u};\vec{v})$، النقطة B ذات اللاحقة z_B حيث $(\vec{u};\overrightarrow{OB})=¯+2k®$

. عين إحداثيتي النقطة B بدلالة ¯.

. لتكن $M(a;b)$ نقطة من نصف المستقيم $[OB)$ لاحقتها العدد المركب z. برّر أن $z=\sqrt{a^2+b^2}\times z_B$ و $Arg(z)=¯$.

. استنتج كتابة للعدد المركب z بدلالة ¯.

حل التطبيق:



1) $|z_A|=\sqrt{3+1}=2$ لدينا $\cos(\vec{u};\overrightarrow{OA})=\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\sin(\vec{u};\overrightarrow{OA})=\frac{1}{2}$

ومنه $(\vec{u};\overrightarrow{OA})=\frac{®}{6}+2k®$ إذن $Arg(z_A)=\frac{®}{6}$.

2) . $B(\cos¯;\sin¯)$.

. لدينا $OB=1$ ومنه $\overrightarrow{OM}=OM.\overrightarrow{OB}=\sqrt{a^2+b^2}.\overrightarrow{OB}$ إذن $z=\sqrt{a^2+b^2}\times z_B$.

لدينا $(\vec{u};\overrightarrow{OM})=(\vec{u};\overrightarrow{OB})=¯+2k®$ ومنه $Arg(z)=¯$.

. لدينا $z=\sqrt{a^2+b^2}\times z_B$ معناه $z=\sqrt{a^2+b^2}(\cos¯+i\sin¯)$.

3) الشكل المثلثي لعدد مركب غير معدوم

تعريف: كل عدد مركب غير معدوم z يكتب على الشكل $z=r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$ حيث $r=|z|$ و $Arg\left(z\right)=\theta$.

هذه الكتابة تسمى الشكل المثلثي للعدد المركب z.

نتائج: $\bar{z}=r\left(\cos\theta-i\sin\theta\right)$ ؛ $-z=r\left(\cos\left(\theta+\pi\right)+i\sin\left(\theta+\pi\right)\right)$.

تطبيقات: المطلوب كتابة الأعداد المركبة على شكلها المثلثي

تطبيق 41 صفحة 147: $z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ ؛ $z_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ ؛ $z_3=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$.

حل التطبيق: $z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$ ؛ $z_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}$ ؛

$z_3=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}$

تطبيق 42 صفحة 147: $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ؛ $z_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ؛ $z_3=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ؛ $z_4=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

حل التطبيق: $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$ ؛ $z_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}$ ؛

$z_3=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos-\frac{\pi}{3}+i\sin-\frac{\pi}{3}$ ؛ $z_4=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{7\pi}{3}+i\sin\frac{7\pi}{3}$.

تطبيق 43 صفحة 147: $z_1=3$ ؛ $z_2=-\sqrt{5}$ ؛ $z_3=i$ ؛ $z_4=\frac{1}{2}i$ ؛ $z_5=-7i$.

حل التطبيق: $z_1=3=3(1+0i)=3(\cos 0+i\sin 0)$ ؛ $z_2=-\sqrt{5}=\sqrt{5}(-1+0i)=\sqrt{5}(\cos\pi+i\sin\pi)$ ؛

$z_3=i=(0+i)=\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ ؛ $z_4=\frac{1}{2}i=\frac{1}{2}(0+i)=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ ؛

$z_5=-7i=7(0-i)=7\left(\cos-\frac{\pi}{2}+i\sin-\frac{\pi}{2}\right)$.

نتيجة:

إذا كان z حقيقيا موجبا تماما فإن $|z|=z$ و $Arg\left(z\right)=0$ ؛ وإذا كان z حقيقيا سالبا تماما فإن $|z|=-z$ و $Arg\left(z\right)=\pi$.

إذا كان z تخيليا صرفا على الشكل $z=yi$ فإن $|z|=|y|$ وفي حالة $y>0$ يكون $Arg\left(z\right)=\frac{\pi}{2}$ وفي حالة $y<0$ يكون $Arg\left(z\right)=-\frac{\pi}{2}$.

تطبيق 44 صفحة 147: $z_1=1+i$ ؛ $z_2=3-3i$ ؛ $z_3=-\sqrt{5}-i\sqrt{15}$ ؛ $z_4=-\sqrt{6}+i\sqrt{2}$.

حل التطبيق:

$z_1=1+i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ؛

$z_2=3-3i=\sqrt{18}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=3\sqrt{2}\left(\cos-\frac{\pi}{4}+i\sin-\frac{\pi}{4}\right)$ ؛

$z_3=-\sqrt{5}-i\sqrt{15}=\sqrt{20}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\sqrt{5}\left(\cos-\frac{2\pi}{3}+i\sin-\frac{2\pi}{3}\right)$ ؛

$z_4=-\sqrt{6}+i\sqrt{2}=\sqrt{8}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

تطبيق 39 صفحة 146: في كل حالة من الحالات المقترحة أدناه ، عين الطويلة وعمدة للعدد المركب z .

أ- $z=4\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. **ب-** $z=-3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

جـ- $z=\sqrt{5}\left(\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}\right)$. **د-** $z=\sin\frac{\pi}{6}-i\cos\frac{\pi}{6}$.

حل التطبيق: **أ-** $z=4\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)=4\left(\cos-\frac{\pi}{4}+i\sin-\frac{\pi}{4}\right)$ ؛ إذن $|z|=4$ و $Arg(z)=-\frac{\pi}{4}$.

ب- $z=-3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=3\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)\right)=3\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$ إذن $|z|=3$ و $Arg(z)=\frac{5\pi}{3}$.

جـ- $z=\sqrt{5}\left(\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{5}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\right)=\sqrt{5}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ ؛ إذن $|z|=\sqrt{5}$ و $Arg(z)=\frac{\pi}{6}$.

د- $z=\sin\frac{\pi}{6}-i\cos\frac{\pi}{6}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos-\frac{\pi}{3}+i\sin-\frac{\pi}{3}$ ؛ إذن $|z|=1$ و $Arg(z)=-\frac{\pi}{3}$.

خاصية: r و r' عددان حقيقيان موجبان تماما؛ θ و θ' عددان حقيقيان.

$r(\cos\theta+i\sin\theta)=r'(\cos\theta'+i\sin\theta')$ معناه $r=r'$ و $\theta=\theta'+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

تطبيق: θ و θ' عددان حقيقيان. أحسب $(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta'+i\sin\theta')$ و $\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta'+i\sin\theta'}$.

حل التطبيق: $(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta'+i\sin\theta')=(\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta')+(\cos\theta\sin\theta'-\sin\theta\cos\theta')i$

أي $(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta'+i\sin\theta')=\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')$.

$$\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta'+i\sin\theta'}=\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta'-i\sin\theta')}{(\cos\theta'+i\sin\theta')(\cos\theta'-i\sin\theta')}=\frac{(\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta')+(\sin\theta\cos\theta'-\cos\theta\sin\theta')i}{(\cos^2\theta'+\sin^2\theta')}$$

أي $\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta'+i\sin\theta'}=\cos(\theta-\theta')+i\sin(\theta-\theta')$.

خواص العمدة: z و z' عددان مركبان غير معدومين:

$Arg(zz')=Arg(z)+Arg(z')$ ؛ $Arg\left(\frac{z}{z'}\right)=Arg(z)-Arg(z')$ ؛ $Arg\left(\frac{1}{z}\right)=-Arg(z')$.

تطبيق 40 صفحة 146: في كل حالة من الحالات التالية مثل مجموعة النقط ذات اللاحقة العدد المركب z الذي يحقق المساواة المقترحة: **أ-** $Arg(iz)=\frac{3\pi}{2}$. **ب-** $Arg\left(\frac{z}{1+i}\right)=\frac{\pi}{4}$. **جـ-** $Arg(z)=Arg(\bar{z})$.

حل التطبيق:

أ- $Arg(iz)=\frac{3\pi}{2}$ معناه $Arg(z)+Arg(i)=\frac{3\pi}{2}$ أي $Arg(z)=\frac{3\pi}{2}-Arg(i)=\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=\pi$ إذن مجموعة النقط M ذات اللاحقة z هي نصف المستقيم من حامل محور الفواصل، فواصل نقطه سالبة تماما.

ب- $Arg\left(\frac{z}{1+i}\right)=\frac{\pi}{4}$ معناه $Arg(z)-Arg(1+i)=\frac{\pi}{4}$ أي $Arg(z)=\frac{\pi}{4}+Arg(1+i)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ إذن مجموعة النقط M ذات اللاحقة z هي نصف المستقيم من حامل محور التراتيب، تراتيب نقطه موجبة تماما.

جـ- $Arg(z)=Arg(\bar{z})$ معناه $Arg(z)=-Arg(z)+2k\pi$ أي $Arg(z)=k\pi$ إذن مجموعة النقط M ذات اللاحقة z هي حامل محور الفواصل باستثناء المبدأ O .

تطبيق 45 صفحة 147: $z_1=(2+2i)\left(\sqrt{3}-i\right)$ ؛ $z_2=\frac{4}{\sqrt{3}+i}$ ؛ $z_3=\frac{3i}{2+2i\sqrt{3}}$ ؛ $z_4=\frac{\sqrt{6}}{1+i}$.

$2+2i=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ؛ $\sqrt{3}-i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos-\frac{\pi}{6}+i\sin-\frac{\pi}{6}\right)$

ومنه $Arg(z_1)=Arg(2+2i)+Arg\left(\sqrt{3}-i\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}$ إذن $z_1=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$.

$z_2=\frac{4}{\sqrt{3}+i}=\frac{4(\cos 0+i\sin 0)}{2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}\right)}=2\left(\cos-\frac{\pi}{6}+\sin-\frac{\pi}{6}\right)$.

$z_3=\frac{3i}{2+2i\sqrt{3}}=\frac{3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)}{4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{3}{4}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

$z_4=\frac{\sqrt{6}}{1+i}=\frac{\sqrt{6}(\cos 0+i\sin 0)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{3}\left(\cos-\frac{\pi}{4}+i\sin-\frac{\pi}{4}\right)$.

تمرين 115 صفحة 153: ρ عدد مركب غير معدوم طويلته r و θ عمدة له.

نعتبر العددين المركبين $z_1=\rho i$ و $z_2=\rho^2$.

1) أحسب بدلالة r و θ الطويلة وعمدة لكل من العددين المركبين z_1 و z_2 .

2) حدد r و θ حتى يكون z_1 و z_2 مترافقين .

حل التمرين: 1) $|z_1|=|\rho i|=|\rho|\times|i|=r$ ؛ $\arg(z_1)=\arg(\rho i)=\arg(\rho)+\arg(i)=\theta+\frac{\pi}{2}$.

$|z_2|=|\rho^2|=|\rho|^2=r^2$ ؛ $\arg(z_2)=\arg(\rho^2)=2\arg(\rho)=2\theta$.

2) z_1 و z_2 مترافقان معناه $\arg(z_1)+\arg(z_2)=2k\pi$ ومعناه $\theta+\frac{\pi}{2}+2\theta=2k\pi$ أي $\theta=-\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

تمرين 36 صفحة 146: z عدد مركب غير معدوم .

أ ـ باستعمال البرهان بالتراجع ، أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $\arg(z^n)=n\arg(z)$.

ب ـ استنتج أنّه من أجل كل عدد صحيح غير معدوم n ، $\arg(z^n)=n\arg(z)$.

حل التمرين: أ ـ الخاصية الابتدائية هي $\arg(z^1)=1\arg(z)$ وهي صحيحة.

نفرض أن $\arg(z^k)=k\arg(z)$ من أجل عدد طبيعي غير معدوم k ولنبرهن أن $\arg(z^{k+1})=(k+1)\arg(z)$.

لدينا: $\arg(z^{k+1})=\arg(zz^k)=\arg(z)+\arg(z^k)=\arg(z)+k\arg(z)=(k+1)\arg(z)$ ؛ إذن حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $\arg(z^n)=n\arg(z)$.

ب ـ إذا كان $n\in\mathbb{Z}_+^*$ وبالتالي n عدد طبيعي غير معدوم وحسب **أ ـ** يكون $\arg(z^n)=n\arg(z)$.

إذا كان $n\in\mathbb{Z}_-^*$ نضع $n=-m$ ولدينا: $\arg(z^n)=\arg(z^{-m})=\arg\left(\frac{1}{z^m}\right)=-\arg(z^m)=-m\arg(z)=n\arg(z)$.

إذن من أجل كل عدد صحيح غير معدوم n ، $\arg(z^n)=n\arg(z)$.

نتيجة: من أجل كل $n\in\mathbb{Z}^*$ ، $\arg(z^n)=n\arg(z)$

تمرين 125 صفحة 154: z ، u و v أعداد مركبة حيث $z=\left(3+\sqrt{3}\right)+i\left(-3+\sqrt{3}\right)$ ، $u=3+i\sqrt{3}$ و $v=\frac{z}{u}$.

1) أكتب v على الشكل الجبري .

2) عين الطويلة وعمدة لكل من الأعداد المركبة u ، v و z .

3) استنتج $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

4) أثبت أن العدد z^{2010} تخيلي صرف .

حل التمرين: 1)

$$v=\frac{z}{u}=\frac{\left(3+\sqrt{3}\right)+i\left(-3+\sqrt{3}\right)}{3+i\sqrt{3}}=\frac{\left[\left(3+\sqrt{3}\right)+i\left(-3+\sqrt{3}\right)\right]\left(3-i\sqrt{3}\right)}{12}$$

$$v=\frac{9+3\sqrt{3}-9i+3\sqrt{3}i-3\sqrt{3}i-3i-3\sqrt{3}+3}{12}=\frac{12-12i}{12}=1-i$$

2) $u=3+i\sqrt{3}$ ؛ $|u|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ ؛ $\cos\theta=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ؛ $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$ ومنه $\arg(u)=\frac{\pi}{6}$.

$v=1-i$ ؛ $|v|=\sqrt{2}$ ؛ $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ؛ $\sin\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ومنه $\arg(v)=-\frac{\pi}{4}$.

$v=\frac{z}{u}$ معناه $z=uv$ وبالتالي $|z|=|u|\times|v|=2\sqrt{6}$ و $\arg(z)=\arg(u)+\arg(v)=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{12}$.

3) لدينا $\left(\cos-\frac{\pi}{12}+i\sin-\frac{\pi}{12}\right)$ $z=\left(3+\sqrt{3}\right)+i\left(-3+\sqrt{3}\right)=2\sqrt{6}$ معناه $\cos-\frac{\pi}{12}=\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

و $\sin-\frac{\pi}{12}=\frac{-3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}=\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ومعناه $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ و $\sin-\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

4) $\arg\left(z^{2010}\right)=2010\arg(z)=-\frac{2010\pi}{12}=-\frac{335\pi}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{336\pi}{2}=\frac{\pi}{2}-168\pi$ بما أن $\cos\frac{\pi}{2}=0$ فإن $\operatorname{Re}\left(z^{2010}\right)=0$ أي العدد z^{2010} تخيلي صرف .

4) ترميز أولير: θ عدد حقيقي؛ يرمز للعدد $\cos\theta+i\sin\theta$ بالرمز $e^{i\theta}$ ونكتب $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$.

ملاحظات: * $\overline{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$ ؛ $e^{-i\theta}=\cos-\theta+i\sin-\theta=\cos\theta-i\sin\theta$.

* إذا كان z عددا مركبا غير معدوم، طويلته r و θ عمدة له فإن $z=r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)=re^{i\theta}$.

$z=re^{i\theta}$ يسمى الشكل الأسّي للعدد المركب z .

نتائج:

دستورا أولير: $\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ ؛ $\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$.

دستور موافر: $\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ ؛ $\left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta}$.

ملاحظات: * $\cos^2\theta+\sin^2\theta=\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2+\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^2=\frac{e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}+2}{4}-\frac{e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}-2}{4}=1$

* $\cos^2\theta-\sin^2\theta=\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^2=\frac{e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}+2}{4}+\frac{e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}-2}{4}=\frac{e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}}{2}=\cos 2\theta$

* $\cos\theta\sin\theta=\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)=\frac{e^{i2\theta}-e^{-i2\theta}}{4i}=\frac{\sin 2\theta}{2}$.

تطبيق 49 صفحة 147: أكتب على الشكل الجبري كل من الأعداد المركبة التالية : $6e^{i\frac{3\pi}{4}}$ ؛ $\sqrt{5}e^{i\frac{3\pi}{2}}$ ؛ $\frac{1}{2}e^{i\pi}$ ؛ $2\sqrt{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

حل التطبيق: $6e^{i\frac{3\pi}{4}}=6\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=-3\sqrt{2}+3\sqrt{2}i$ ؛ $\sqrt{5}e^{i\frac{3\pi}{2}}=\sqrt{5}\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)=-\sqrt{5}i$ ؛

$\frac{1}{2}e^{i\pi}=\frac{1}{2}(\cos\pi+i\sin\pi)=-\frac{1}{2}$ ؛ $2\sqrt{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}}=2\sqrt{3}\left(\cos-\frac{2\pi}{3}+i\sin-\frac{2\pi}{3}\right)=2\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\sqrt{3}-3i$.

تطبيق 50 صفحة 147: أكتب الأعداد المركبة التالية على الشكل الأسّي: $z_1=2-2i$ ؛ $z_2=3\sqrt{3}-3i$ ؛ $z_3=\frac{5}{4}i$ ؛ $z_4=-1$.

حل التطبيق: $z_1=2-2i$ ؛ $|z_1|=2\sqrt{2}$ و $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $\sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ إذن $\theta=-\frac{\pi}{4}$ ومنه $z_1=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

$z_2=3\sqrt{3}-3i$ ؛ $|z_2|=6$ و $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\sin\theta=-\frac{1}{2}$ إذن $\theta=-\frac{\pi}{6}$ ومنه $z_2=6e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

$z_3=\frac{5}{4}i$ ؛ $|z_3|=\frac{5}{4}$ و $\theta=\frac{\pi}{2}$ ومنه $z_3=\frac{5}{4}e^{i\frac{\pi}{2}}$. $z_4=-1$ ؛ $|z_4|=1$ و $\theta=\pi$ ومنه $z_4=e^{i\pi}$.

خواص: $e^{i\theta}\times e^{i\theta'}=e^{i(\theta+\theta')}$ ؛ $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}=e^{i(\theta-\theta')}$ ؛ $\frac{1}{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$ ؛ $-e^{i\theta}=e^{i(\theta+\pi)}$.

تطبيق 51 ص 147: عين شكلا أسيا لكل من الأعداد المركبة التالية: $z_1=-e^{i\frac{\pi}{12}}$ ؛ $z_2=-3e^{i\frac{\pi}{8}}$ ؛ $z_3=-\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ؛ $z_4=-\frac{1}{2}e^{i\pi}$.

حل التطبيق: $z_1=-e^{i\frac{\pi}{12}}=e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\pi\right)}=e^{i\frac{13\pi}{12}}$ ؛ $z_2=-3e^{i\frac{\pi}{8}}=3e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\pi\right)}=3e^{i\frac{9\pi}{8}}$ ؛

$z_3=-\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}=\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{3}+\pi\right)}=\sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ؛ $z_4=-\frac{1}{2}e^{i\pi}=\frac{1}{2}e^{i(\pi+\pi)}=\frac{1}{2}e^{2i\pi}=\frac{1}{2}$.

تمرين 155 صفحة 128: نضع : $a=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ و $b=1-i$.

1) أكتب على الشكل الأسّي كلا من الأعداد المركبة a ، b و $\frac{a}{b}$.

2) أكتب العدد $\frac{a}{b}$ على الشكل الجبري. استنتج القيمتين المضبوطتين للعددين $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

3) حل في المجال $]-\pi;\pi[$ المعادلة $\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\cos x+\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sin x=2$.

حل تمرين: 1) $a=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos-\frac{\pi}{6}+i\sin-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

$b=1-i=\sqrt{2}\left(\cos-\frac{\pi}{4}+i\sin-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ؛ $\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}=e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)}=e^{i\frac{\pi}{12}}$.

2) $\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1-i)}=\frac{\left(\sqrt{6}-i\sqrt{2}\right)(1+i)}{2(1-i)(1+i)}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i$. $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ و $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

3) $\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\cos x+\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sin x=2$ معناه $\frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{4}\cos x+\frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}\sin x=\frac{1}{2}$ ومعناه

$\cos\frac{\pi}{12}\cos x+\sin\frac{\pi}{12}\sin x=\frac{1}{2}$ يكافئ $\cos\left(x-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{2}$ ويكافئ $x-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ أو $x-\frac{\pi}{12}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ مع

$k\in\mathbb{Z}$ أي $x=\frac{5\pi}{12}+2k\pi$ أو $x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$ ؛ وفي المجال $]-\pi;\pi[$ يكون $x=\frac{5\pi}{12}$ و $x=-\frac{\pi}{4}$.

5) خواص هندسية:

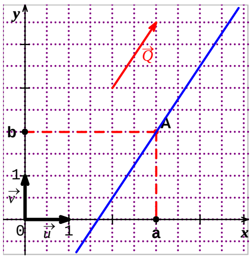
الخاصية 1: A ، B ، C و D نقط من المستوي المركب المنسوب إلى المعلم $(O;\vec{u};\vec{v})$ حيث $A \neq B$ و $D \neq C$.

$\frac{CD}{AB} = \left|\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right|$ و $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}) = (\vec{u};\overrightarrow{CD}) - (\vec{u};\overrightarrow{AB}) = \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$.

نتائج:

* $\overrightarrow{AB}$ يعامد $\overrightarrow{CD}$ معناه $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ومعناه $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ تخيلي صرف.

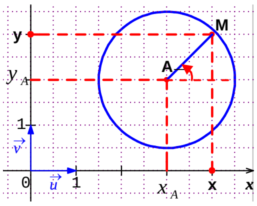
* $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطان خطيا معناه $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = k\pi$ ومعناه $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ حقيقي.



خاصية 2: $A(a;b)$ نقطة من المستوي و $\vec{Q}$ شعاع غير معدوم لاحقته العدد المركب $z_{\vec{Q}} = re^{i\theta}$.

Δ المستقيم الذي يشمل النقطة A و $\vec{Q}$ شعاع توجيهي له. M نقطة من المستوي لاحقتها العدد المركب z.

$M \in \Delta$ معناه $\overrightarrow{AM} = \lambda.\vec{Q}$ مع $\lambda \in \mathbb{R}$ أي $z - z_A = \lambda re^{i\theta}$ مع $\lambda \in \mathbb{R}$.



خاصية 3: نعتبر الدائرة ζ ذات المركز $A(a;b)$ ونصف القطر r.

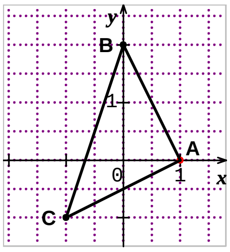
لتكن M نقطة ذات اللاحقة $z = x + iy$.

$M \in \zeta$ معناه $|z - z_A| = r$ ومعناه $z - z_A = re^{i\theta}$ مع $\theta \in \mathbb{R}$.

تمرين 116 صفحة 153: A ؛ B و C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب $z_1 = 1$ ؛ $z_2 = 2i$ و $z_3 = -1 - i$.

1) أحسب $|z_2 - z_1|$ و $|z_3 - z_1|$.

2) أحسب $\arg\left(\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right)$.



3) استنتج طبيعة المثلث ABC.

حل التمرين: 1) $|z_2 - z_1| = |-1 + 2i| = \sqrt{5}$ و $|z_3 - z_1| = |-2 - i| = \sqrt{5}$.

2) $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{-1+2i}{-2-i} = \frac{(-1+2i)(-2+i)}{(-2-i)(-2+i)} = \frac{-5i}{5} = -i$ ومنه $\arg\left(\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right) = -\frac{\pi}{2}$

3) لدينا $AB = AC = \sqrt{5}$ ؛ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ إذن المثلث ABC متساوي الساقين وقائم في A .

تمرين 136 صفحة 156: في المستوي المركب ، نرفق بكل نقطة m ذات اللاحقة العدد المركب z ، النقطة M ذات اللاحقة $Z = \frac{z^3}{2 + |z|^3}$. تعطى الكتابة الأسيّة لكل من العددين المركبين z و Z : $z = re^{i\alpha}$ و $Z = \rho e^{i\theta}$.

1) عبر عن ρ و θ بدلالة r و α على الترتيب .

2) نرمز بِـ $\mathscr{C}$ الدائرة ذات المركز O ونصف القطر 1. A النقطة ذات اللاحقة $1 - i$.

أ . عين مجموعة النقط M لما النقطة m تمسح الدائرة $\mathscr{C}$.

ب . عين مجموعة النقط M لما النقطة m تمسح نصف المستقيم $[OA)$.

3) نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ بِـ : $f(x) = \frac{x^3}{2 + x^3}$.

أ . بين أن الدالة f متزايدة تماما وعين صورة المجال $[0;+\infty[$ بواسطة الدالة f .

ب . استنتج أنه من أجل كل نقطة m من المستوي , النقطة M تنتمي إلى قرص يطلب تعيينه .

حل التمرين: 1) لدينا $Z=\dfrac{z^3}{2+|z|^3}$ معناه $Z=\dfrac{r^3}{2+r^3}e^{i3\theta}$ ومعناه $\rho e^{i\varphi}=\dfrac{r^3}{2+r^3}e^{i3\theta}$ ومعناه $\rho=\dfrac{r^3}{2+r^3}$ و $\varphi=3\theta+2k\pi$

2) نرمز بـ $\mathscr{C}$ الدائرة ذات المركز O ونصف القطر 1. A النقطة ذات اللاحقة $1-i$.

أ . تعيين مجموعة النقط M لما النقطة m تمسح الدائرة $\mathscr{C}$.

$m\in\mathscr{C}$ معناه $z=e^{it}$ مع $t\in\mathbb{R}$ ومعناه $Z=\dfrac{1}{3}e^{i3t}$ أي $Z=\dfrac{1}{3}e^{it'}$ مع $t'\in\mathbb{R}$ ومنه مجموعة النقط M هي الدائرة ذات المركز O ونصف القطر $\dfrac{1}{3}$.

ب . تعيين مجموعة النقط M لما النقطة m تمسح نصف المستقيم $[OA)$.

$m\in[OA)$ معناه $\overrightarrow{Om}=\alpha\overrightarrow{OA}$ مع $\alpha\in\mathbb{R}_+$ ومعناه $z=\alpha z_A=\alpha\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$ أي $Z=\dfrac{2\alpha\sqrt{2}}{2+2\alpha\sqrt{2}}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$ ومعناه $Z=\dfrac{\alpha}{1+\alpha\sqrt{2}}\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}=\alpha\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$ مع $\alpha\in\mathbb{R}_+$ ومنه مجموعة النقط M هي نصف المستقيم $[OB)$ حيث $z_B=\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}=-1-i$ أي $B(-1;-1)$.

3) نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^3}{2+x^3}$.

أ . بين أن الدالة f متزايدة تماما وعين صورة المجال $[0;+\infty[$ بواسطة الدالة f.

ليكن $x\in[0;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{3x^2(2+x^3)-3x^2x^3}{(2+x^3)^2}=\dfrac{6x^2}{(2+x^3)^2}$ ومنه من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ؛ $f'(x)>0$ و $f'(0)=0$ وبالتالي f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ ومنه $f([0;+\infty[)=[0;1[$

ب . استنتج أنه من أجل كل نقطة m من المستوي ، النقطة M تنتمي إلى قرص يطلب تعيينه .

لدينا $\rho=\dfrac{r^3}{2+r^3}$ ومنه $f(r)=\rho$ إذن $\rho\in[0;1[$ أي $OM<1$ إذن M تنتمي إلى قرص ذي المركز O ونصف القطر 1.

المعادلات من الدرجة الثانية في $\mathbb{C}$

1) المعادلات من الدرجة الثانية:

نعتبر المعادلة ذات المجهول المركب z التالية: $az^2+bz+c=0$ مع a ، b و c أعداد مركبة و a غير معدوم.

$\Delta=b^2-4ac$ مميز المعادلة وليكن δ أحد الجذرين التربيعيين للعدد المركب Δ.

المعادلة $az^2+bz+c=0$ تقبل حلين مركبين هما : $z'=\dfrac{-b-\delta}{2a}$ و $z''=\dfrac{-b+\delta}{2a}$

ملاحظة: إذا كان $b=2b'$ فإن $\Delta=b^2-4ac=4\left(b'^2-ac\right)$ ويكون $\Delta'=b'^2-ac$ المميز المختصر للمعادلة

والحلان هما: $z'=\dfrac{-b'-\delta'}{a}$ و $z''=\dfrac{-b'+\delta'}{a}$ مع δ' أحد الجذرين التربيعيين للعدد المركب Δ'.

تمرين 56 صفحة 148: حل في $\mathbb{C}$ كلا من المعادلات ذات المجهول z التالية :

أ ـ $2z^2-6z+5=0$.   **ب ـ** $z^2-5z+9=0$.   **جـ ـ** $z^2+z+1=0$.

د ـ $z^2-2z+3=0$.   **هـ ـ** $z^2=z+1$.   **و ـ** $z^2+3=0$.

حل التطبيق: أ ـ $2z^2-6z+5=0$ ؛ $\Delta'=9-10=-1=i^2$ ومنه $z'=\dfrac{3-i}{2}$ و $z''=\dfrac{3+i}{2}$.

ب ـ $z^2-5z+9=0$ ؛ $\Delta=25-36=-11=\left(i\sqrt{11}\right)^2$ ومنه $z'=\dfrac{5-i\sqrt{11}}{2}$ و $z''=\dfrac{5+i\sqrt{11}}{2}$.

جـ ـ $z^2+z+1=0$ ؛ أنظر النشاط الأول.

د ـ $z^2-2z+3=0$ ؛ $\Delta'=1-3=-2=\left(i\sqrt{2}\right)^2$ ومنه $z'=1-i\sqrt{2}$ و $z''=1+i\sqrt{2}$.

هـ ـ $z^2=z+1$ معناه $z^2-z-1=0$ ؛ $\Delta=1+4=5$ ومنه $z'=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ و $z''=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

و ـ $z^2+3=0$ معناه $z^2=-3=\left(i\sqrt{3}\right)^2$ ومعناه $z=i\sqrt{3}$ أو $z=-i\sqrt{3}$.

ملاحظات: إذا كان $\Delta\in\mathbb{R}_+$ فإن الحلين يكونا حقيقيين وإذا كان $\Delta\in\mathbb{R}_-^*$ فإن الحلين يكونا مترافقين.

2) الجذران التربيعيان لعدد مركب:

مثال 1: عين الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z=1-i\sqrt{3}$.

الطريقة الأولى: الشكل الأسي:

$z=1-\sqrt{3}i=2\left(\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$. ليكن $\omega=re^{i\theta}$ حيث $\omega^2=z$.

$\omega^2=z$ معناه $r^2e^{2i\theta}=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ومعناه $r^2=2$ و $2\theta=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ أي $r=\sqrt{2}$ و $\theta=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi$.

إذن $\omega'=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ و $\omega''=\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$.

الطريقة الثانية: الشكل الجبري:

ليكن $\omega=x+iy$ حيث $\omega^2=z$.

$\omega^2=z$ معناه $x^2-y^2+2xyi=1-i\sqrt{3}$ ومعناه $x^2-y^2=1$ و $2xy=-\sqrt{3}$.

لدينا $\left|\omega^2\right|=|z|$ معناه $|\omega|^2=2$ أي $x^2+y^2=2$.

لنحل الجملة $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^2-y^2=1 \\ xy<0 \end{cases}$ معناه $\begin{cases} 2x^2=3 \\ 2y^2=1 \\ xy<0 \end{cases}$ ومعناه $\begin{cases} x^2=\frac{3}{2} \\ y^2=\frac{1}{2} \\ xy<0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x=\frac{\sqrt{6}}{2} \text{ أو } x=-\frac{\sqrt{6}}{2} \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ أو } y=-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ xy<0 \end{cases}$ ومعناه

$(x;y)=\left(\frac{\sqrt{6}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ أو $(x;y)=\left(-\frac{\sqrt{6}}{2};+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ أي $\sim=\frac{\sqrt{6}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$ أو $\sim=-\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

ملاحظة: كل عدد مركب يقبل جذرين تربيعيين متعاكسين.

مثال 2: عين الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z=-8+6i$.

ليكن $\sim=x+iy$ حيث $\sim^2=z$.

$\sim^2=z$ معناه $x^2-y^2+2xyi=-8+6i$ ومعناه $x^2-y^2=-8$ و $2xy=6$.

لدينا $\left|\sim^2\right|=|z|$ معناه $|\sim|^2=2$ أي $x^2+y^2=10$.

لنحل الجملة $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x^2-y^2=-8 \\ xy>0 \end{cases}$ معناه $\begin{cases} 2x^2=2 \\ 2y^2=18 \\ xy>0 \end{cases}$ ومعناه $\begin{cases} x^2=1 \\ y^2=9 \\ xy>0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x=1 \text{ أو } x=-1 \\ y=3 \text{ أو } y=-3 \\ xy>0 \end{cases}$ ومعناه $(x;y)=(1;3)$ أو

$(x;y)=(-1;-3)$ أي $\sim=-1-3i$ أو $\sim=1+3i$.

تطبيق 62 صفحة 148:

1) جد في المجموعة $\mathbb{C}$ الجذرين التربيعيين للعدد المركّبة $L=2-2i\sqrt{3}$.

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $2z^2+4iz+i\sqrt{3}-3=0$.

حل التطبيق:

1) ليكن $l=x+iy$ حيث $l^2=L$.

$l^2=L$ معناه $x^2-y^2+2ixy=2-2i\sqrt{3}$ ومعناه $x^2-y^2=2$ و $xy=-\sqrt{3}$.

لدينا $\left|l^2\right|=|L|$ معناه $|l|^2=|L|$ ومعناه $x^2+y^2=4$

لنحل الجملة $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x^2-y^2=2 \\ xy<0 \end{cases}$ معناه $\begin{cases} 2x^2=6 \\ 2y^2=2 \\ xy<0 \end{cases}$ ومعناه $\begin{cases} x^2=3 \\ y^2=1 \\ xy<0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x=\sqrt{3} \text{ أو } x=-\sqrt{3} \\ y=1 \text{ أو } y=-1 \\ xy<0 \end{cases}$ ومعناه $(x;y)=(\sqrt{3};-1)$ أو

$(x;y)=(-\sqrt{3};1)$ أي $l=\sqrt{3}-i$ أو $l=-\sqrt{3}+i$.

2) $2z^2+4iz+i\sqrt{3}-3=0$ ؛ $\Delta'=(2i)^2-2\left(i\sqrt{3}-3\right)=2-2i\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}-i\right)^2$ ومنه

$z'=\frac{-2i+\sqrt{3}-i}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$ و $z''=\frac{-2i-\sqrt{3}+i}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$. $Es=\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\,;-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right\}$

تمرين 158 صفحة 158: نعتبر في مجموعة الأعداد المركّبة المعادلة (E) ذات المجهول z التالية :

$z^3-(6+i)z^2+(13+i)z-10+2i=0$.

1) أثبت أنّ المعادلة (E) تقبل حلاّ حقيقيا z_0 يطلب تعيينه .

2) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ ، المعادلة (E) . نسمي z_1 الحل الذي جزئه التخيّلي سالب و z_2 الحل الثالث.

3) في المستوي المركب لتكن النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب z_0 ، z_1 و z_2.

. جد إحداثيتي النقطة G مرجّح النقط A، B و C المرفقة بالمعاملات: -2 ، 3 و 1 على الترتيب .

. عيّن المجموعة $\mathscr{E}_M$ للنقط M من المستوي حيث : $-2MA^2+3MB^2+MC^2=9$.

حل التمرين:

1) إثبات أنّ المعادلة (E) تقبل حلاّ حقيقيا z_0. نضع $z_0=x$ مع $x\in\mathbb{R}$.

$x^3-(6+i)x^2+(13+i)x-10+2i=0$ معناه $x^3-6x^2+13x-10+(-x^2+x+2)i=0$ ومعناه

$x^3-6x^2+13x-10=0$ و $-x^2+x+2=0$.

لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة $-x^2+x+2=0$ ؛ $\Delta=9$ ومنه $x'=\dfrac{-1-3}{-2}=2$ و $x''=\dfrac{-1+3}{-2}=-1$.

إذا كان $x=2$ فإن $2^3-6\times2^2+13\times2-10=0$ وهذا محقق. إذا كان $x=-1$ فإن

$(-1)^3-6\times(-1)^2+13(-1)-10=-30$ إذن $x\neq-1$ ؛ ومنه المعادلة المعطاة تقبل حلا حقيقيا $z_0=2$

2) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ ، المعادلة (E) . نسمي z_1 الحل الذي جزئه التخيّلي سالب و z_2 الحل الثالث.

ليكن $z\in\mathbb{C}$، $z^3-(6+i)z^2+(13+i)z-10+2i=(z-2)(z^2+az+b)=z^3+(a-2)z^2+(b-2a)z-2b$

إذن: $a-2=-6-i$ ، $b-2a=13+i$ و $-2b=-10+2i$ أي $a=-4-i$ و $b=5-i$ والعبارة الثانية محققة وبالتالي

$z^3-(6+i)z^2+(13+i)z-10+2i=(z-2)(z^2-(4+i)z+5-i)$

$z^3-(6+i)z^2+(13+i)z-10+2i=0$ معناه $z=2$ أو $z^2-(4+i)z+5-i=0$

$\Delta=(4+i)^2-4(5-i)=15+8i-20+4i=-5+12i$ ؛

ليكن $\text{¢}=x+iy$، $\text{¢}^2=\Delta$ معناه $x^2-y^2+2ixy=-5+12i$ أي $x^2-y^2=-5$ و $xy=6$.

$|\text{¢}^2|=|\Delta|$ معناه $|\text{¢}|^2=|\Delta|$ ومعناه $x^2+y^2=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13$.

$\begin{cases}x^2+y^2=13\\x^2-y^2=-5\\xy>0\end{cases}$ معناه $\begin{cases}2x^2=8\\2y^2=18\\xy>0\end{cases}$ ومعناه $\begin{cases}x^2=4\\y^2=9\\xy>0\end{cases}$ أي $\begin{cases}x=2 \text{ أو } x=-2\\y=3 \text{ أو } y=-3\\xy>0\end{cases}$ إذن $\text{¢}=2+3i$ أو $\text{¢}=-2-3i$

$z'=\dfrac{4+i+2+3i}{2}=3+2i$ و $z''=\dfrac{4+i-2-3i}{2}=1-i$ وبالتالي $Es=\{2;3+2i;1-i\}$.

$z_0=2$ ؛ $z_1=1-i$ و $z_2=3+2i$.

3) في المستوي المركب لتكن النقط A، B و C التي لواحقها على الترتيب ، z_0، z_1 و z_2.

. النقطة G مرجّح النقط A، B و C المرفقة بالمعاملات: -2 ، 3 و 1 على الترتيب .

$z_G=\dfrac{-2z_0+3z_1+z_2}{2}=\dfrac{-4+3-3i+3+2i}{2}=1-\dfrac{1}{2}i$ إذن $G\left(1;-\dfrac{1}{2}\right)$.

. تعيّين المجموعة $\mathscr{E}_M$ للنقط M من المستوي حيث: $-2MA^2+3MB^2+MC^2=9$.

$-2MA^2+3MB^2+MC^2=9$ معناه $-2\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+3\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2=9$ ومعناه

$2MG^2+2\overrightarrow{GM}\left(-2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)=9+2GA^2-3GB^2-GC^2$ أي $2MG^2=9+2GA^2-3GB^2-GC^2$.

$GA^2=1+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{4}$؛ $GB^2=\dfrac{1}{4}$ ؛ $GC^2=4+\dfrac{25}{4}=\dfrac{41}{4}$.

$GM^2=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{36}{4}+\dfrac{10}{4}-\dfrac{3}{4}-\dfrac{41}{4}\right)=\dfrac{1}{4}$ معناه $GM=\dfrac{1}{2}$ إذن $\mathscr{E}_M$ هي الدائرة ذات المركز G ونصف القطر $\dfrac{1}{2}$.

التحويلات النقطية

1) الانسحاب

ينسب المستوي المركب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$.

التعريف: $\vec{P}$ شعاع من المستوي. الانسحاب الذي شعاعه $\vec{P}$ هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M النقطة M' حيث $\overrightarrow{MM'}=\vec{P}$.

خواص:

* إذا كان $\vec{P}$ معدوما فإن كل نقط المستوي صامدة بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{P}$.
* إذا كان $\vec{P}$ غير معدوم فإنه لا توجد نقطة صامدة بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{P}$.
* صورة ثنائية نقطية $(A;B)$ بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{P}$ هي الثنائية النقطية $(A';B')$ حيث $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AB}$.
* الانسحاب هو تقايس (يحافظ على المسافات)
* الانسحاب يحافظ على الاستقامية ؛ أقياس الزوايا ؛ المرجح والتوازي.

التعريف المركب: z و z' عددان مركبان صورتهما النقطتين M و M' على الترتيب. $\vec{P}$ شعاع من المستوي لاحقته العدد المركب b.

التعريف المركب للانسحاب الذي شعاعه $\vec{P}$ هو $z'=z+b$.

مثال 1: العبارة المركبة للانسحاب الذي شعاعه $\vec{Q}(-1;2)$ هي: $z'=z-1+2i$.

مثال 2: العبارة $z'=z-3i$ هي التعريف المركب للانسحاب ذي الشعاع $\vec{P}(0;-3)$ والذي يحول النقطة M ذات اللاحقة z إلى النقطة M' ذات اللاحقة z'.

2) التحاكي:

ينسب المستوي المركب إلى معلم $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$.

التعريف: Ω نقطة من المستوي. ª عدد حقيقي غير معدوم.

التحاكي الذي مركزه Ω نسبته ª هو التحويل النقطي الذي برفق بكل نقطة M النقطة M' حيث $\overrightarrow{\Omega M'}=ª.\overrightarrow{\Omega M}$.

خواص:

* للتحاكي نقطة صامدة واحدة وهي المركز Ω.
* صورة ثنائية نقطية $(A;B)$ بالتحاكي الذي مركزه Ω نسبته ª هي الثنائية النقطية $(A';B')$ حيث $\overrightarrow{A'B'}=ª\overrightarrow{AB}$.
* التحاكي يحافظ على الاستقامية ؛ أقياس الزوايا ؛ المرجح والتوازي

التعريف المركب: a عدد حقيقي غير معدوم ويختلف عن 1. Ω نقطة ثابتة من المستوي لاحقتها العدد المركب z_Ω.

z و z' عددان مركبان صورتهما النقطتين M و M' على الترتيب.

التعريف المركب للتحاكي الذي مركزه Ω ونسبته a هو $z'-z_\Omega=a\left(z-z_\Omega\right)$

ملاحظة: $z'-z_\Omega=a\left(z-z_\Omega\right)$ معناه $z'=az+(1-a)z_\Omega$

نضع $b=(1-a)z_\Omega$ ومنه $z'=az+b$ إذن التعريف المركب للتحاكي هو $z'=az+b$ حيث $a\in\mathbb{R}^*-\{1\}$ و b عدد مركب.

نسبة التحاكي هي العدد الحقيقي a ولاحقة مركزه $z_\Omega=\dfrac{b}{1-a}$.

مثال 1: أكتب العبارة المركبة للتحاكي ذي المركز O مبدأ المعلم ونسبته 3. $z'-z_O=3\left(z-z_O\right)$ أي $z'=3z$.

مثال 2: Ω نقطة لاحقتها العدد المركب µ $=1-i$. عين العبارة المركبة للتحاكي ذي النسبة $-\dfrac{1}{2}$ والمركز Ω.

$$z'-z_\Omega=-\frac{1}{2}\left(z-z_\Omega\right) \text{ أي } z'=-\frac{1}{2}z+\frac{3}{2}z_\Omega \text{ أي } z'=-\frac{1}{2}z+\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i$$

مثال 3: ما هي طبيعة التحويل النقطي المعرف بـ: $z'=-\frac{3}{2}z-2+3i$.

هو تحاك نسبته $-\frac{3}{2}$ ولاحقة مركزه العدد المركب $-\frac{4}{5}+\frac{6}{5}i=\frac{-2+3i}{1+\frac{3}{2}}$.

تطبيق 82 صفحة 150: A ، B و C ثلاث نقط من المستوي لواحقها على الترتيب $a=3+i$ ، $b=-2+3i$ و $8-i$.

أ ـ عيّن نسبة التحاكي h ذي المركز C والذي يحوّل A إلى B.

ب ـ نقول عن مستقيم الذي ينطبق على صورته بتحويل ، أنه صامدا إجماليا .

برهن أن المستقيم الذي يشمل النقطة C ومعامل توجيهه 2 هو صامد إجمالي ، ثم أكتب معادلة له .

حل التطبيق:

أ ـ لدينا: $z_B=\sim z_A+$ و $z_C=\frac{}{1-\sim}$ ومعناه $-2+3i=(3+i)\sim+$ و $=(1-\sim)(8-i)$

معناه $-2+3i=(3+i)\sim+(8-i)-\sim(8-i)$ و $=(1-\sim)(8-i)$ ومعناه $(-5+2i)\sim=-10+4i$

و $=(1-\sim)(8-i)$ أي $\sim=2$ و $=-8+i$ ؛ إذن التعريف المركب هو $z'=2z-8+i$

إذن نسبة التحاكي هي $\sim=2$.

نسمي Δ المستقيم الذي يشمل النقطة C ومعامل توجيهه 2 ؛ من أجل كل نقطة M من Δ لدينا صورتها بالتاحاكي ذي المركز C والنسبة 2 هي M' حيث $\overrightarrow{CM'}=2.\overrightarrow{CM}$ وبالتالي $M'\in\Delta$ أي المستقيم Δ صامد إجمالي.

تطبيق 85 صفحة 150 : t هو التحويل في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M ذات الإحداثيتين (x,y) ، النقطة M' ذات الإحداثيتين (x',y') حيث : $x'=2x-\frac{3}{2}$ و $y'=2y+\frac{1}{2}$.

أ ـ ما هي طبيعة التحويل t ؟

ب ـ أكتب العبارة المركّبة للتحويل t .

حل التطبيق:

1) نعتبر النقطة $\Omega(x;y)$ حيث $(1-2)x=-\frac{3}{2}$ و $(1-2)y=\frac{1}{2}$ إذن $x=\frac{3}{2}$ و $y=-\frac{1}{2}$.

لدينا $x'-\frac{3}{2}=2x-\frac{6}{2}$ و $y'+\frac{1}{2}=2y+1$ معناه $x'-\frac{3}{2}=2\left(x-\frac{3}{2}\right)$ و $y'+\frac{1}{2}=2\left(y+\frac{1}{2}\right)$ أي $\overrightarrow{\Omega M'}=2.\overrightarrow{\Omega M}$

إذن t هو التحاكي ذو المركز $\Omega\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$ والنسبة 2.

2) التعريف المركب للتحاكي هو $z'=2z+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$.

3) الدوران:

ينسب المستوي المركب إلى معلم $(O;\vec{u};\vec{v})$.

التعريف: Ω نقطة من المستوي؛ ¯ عدد حقيقي.

الدوران الذي مركزه Ω وزاويتها ¯ هو التحويل النقطي في المستوي، يرفق بكل نقطة M النقطة M' حيث $\Omega M'=\Omega M$ و $(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'})=\text{¯}+2k\text{®}$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

خواص:

* إذا كان $\text{¯}=0$ فإن كل نقط المستوي صامدة بالدوران ذي المركز Ω والزاوية 0 وفي هذه الحالة هو التحويل المطابق.

* إذا كان $\theta \neq 0$ فإن للدوران نقطة صامدة وحيدة وهي مركزه.

* صورة كل ثنائية نقطية $(A;B)$ بالدوران هي الثنائية $(A';B')$ حيث $A'B'=AB$.

* الدوران هو تقايس (يحافظ على المسافات)

* الدوران يحافظ على الاستقامية ؛ أقياس الزوايا والمرجح.

التعريف المركب: θ عدد حقيقي. Ω نقطة ثابتة من المستوي لاحقتها العدد المركب z_Ω.

z و z' عددان مركبان صورتهما النقطتين M و M' على الترتيب بالدوران الذي مركزه Ω وزاويته θ

لدينا: $|z'-z_\Omega|=|z-z_\Omega|$ و $\arg(z'-z_\Omega)-\arg(z-z_\Omega)=\theta$ وهذا يعني : $\left|\dfrac{z'-z_\Omega}{z-z_\Omega}\right|=1$ و $\arg\left(\dfrac{z'-z_\Omega}{z-z_\Omega}\right)=\theta$

ويكافئ $\dfrac{z'-z_\Omega}{z-z_\Omega}=e^{i\theta}$

نضع $a=e^{i\theta}$ إذن $z'-z_\Omega=a(z-z_\Omega)$ وهذا يعني $z'=az+(1-a)z_\Omega$.

خاصية: التعريف المركب للدوران هو $z'=az+b$ حيث $a\in\mathbb{C}^*-\{1\}$ و $|a|=1$ ، زاوية الدوران هي $\arg(a)$ ومركزه صورة العدد المركب $\dfrac{b}{1-a}$.

مثال 1: أكتب عبارة مركبة للدوران الذي مركزه O مبدأ المعلم وزاويته $\dfrac{\pi}{6}$.

مثال 2: ما هي طبيعة التحويل t المعرف بـ : $z'=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)z+2+\sqrt{2}-i\sqrt{2}$ مطلوب إعطاء عناصره المميزة.

$a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$ و $|a|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}|-1+i|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}=1$ إذن t هو دوران.

$a=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}=e^{i\frac{3\pi}{4}}$ إذن زاوية الدوران t هي $\dfrac{3\pi}{4}$. $\dfrac{2+\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i}=2$ وبالتالي مركز الدوران t هو $\Omega(2;0)$.

تطبيق 83 صفحة 150: A و B نقطتان من المستوي لاحقتاهما $a=\dfrac{1}{2}(1+i)$ و $b=\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$.

عين زاوية الدوران الذي مركزه مبدأ المعلم O ويحوّل A إلى B.

حل التطبيق: $\dfrac{z_B-z_O}{z_A-z_O}=\dfrac{\sqrt{2}i}{1+i}=\dfrac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}=e^{i\frac{\pi}{4}}$ إذن زاوية الدوران هي $\dfrac{\pi}{4}$.

تطبيق 84 صفحة 150: t هو التحويل في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M ذات الإحداثيتين (x,y) ، النقطة M' ذات الإحداثيتين (x',y') حيث : $x'=1-y$ و $y'=x-2$. نضع $z=x+iy$ و $z'=x'+iy'$.

أ ـ أكتب z' بدلالة z .

ب ـ ما هي طبيعة التحول t مبيّنا عناصره المميّزة ؟

حل التطبيق:

أ ـ $z'=x'+iy'=1-y+(x-2)i=xi-y+1-2i=i(x+iy)+1-2i$ أي $z'=iz+1-2i$

ب ـ طبيعة التحول t وعناصره المميّزة: $i=e^{i\frac{\pi}{2}}$ إذن t دوران زاويته $\dfrac{\pi}{2}$ ومركزه صورة العدد المركب

$\dfrac{1-2i}{1-i}=\dfrac{(1-2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}i$.

ملخص: T معرف بـ: $z' = az + b$

	التحويل T هو:	العناصر المميزة	يحافظ على	صورة دائرة مركزها µ ونق r
$a = 1$	انسحاب	شعاعه $\vec{w}$ لاحقته b	المسافات؛ أقياس الزوايا؛ الاستقامية؛ المرجح والتوازي	هي دائرة تقايسها مركزها µ' صورة µ بالانسحاب.
$a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$	تحاك	نسبته a ولاحقة مركزه $\frac{b}{1-a}$	أقياس الزوايا؛ الاستقامية؛ المرجح والتوازي.	هي دائرة مركزها µ' صورة µ بالتحاكي ونصف قطرها $\lvert a\rvert \times r$.
$a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ و $\lvert a\rvert = 1$	دوران	زاويته $\arg(a)$ ولاحقة مركزه $\frac{b}{1-a}$	المسافات ؛ أقياس الزوايا؛ الاستقامية والمرجح.	هي دائرة تقايسها مركزها µ' صورة µ بالدوران.

تمرين 160 صفحة 159: (بكالوريا)

1) أحسب العدد المركب $\left(2\sqrt{3}+i\right)^3$.

2) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^3 = 18\sqrt{3}+35i$.

3) نرمز بـ : z_1 ، z_2 و z_3 إلى حلول هذه المعادلة ؛ A ، B و C صورها في المستوي ، على الترتيب .

أ ـ عيّن زاوية الدوران الذي مركزه مبدأ المعلم O ويحوّل النقطة B إلى النقطة C .

ب ـ عيّن صورة بهذا الدوران للمستقيم Δ شعاع توجيهه $\vec{w}$ حيث : $\left(\vec{u};\vec{w}\right) = \frac{®}{2}$.

حل التمرين:

1) $\left(2\sqrt{3}+i\right)^3 = \left(2\sqrt{3}\right)^3 + 3\left(2\sqrt{3}\right)^2 i + 3\left(2\sqrt{3}\right)i^2 + i^3 = 24\sqrt{3}+36i-6\sqrt{3}-i = 18\sqrt{3}+35i$.

2) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^3 = 18\sqrt{3}+35i$.

$z^3 = 18\sqrt{3}+35i$ معناه $z^3 = \left(2\sqrt{3}+i\right)^3$ ومعناه $z^3 - \left(2\sqrt{3}+i\right)^3 = 0$ أي

$\left[z-\left(2\sqrt{3}+i\right)\right]\left[z^2+\left(2\sqrt{3}+i\right)z+\left(2\sqrt{3}+i\right)^2\right]=0$ ومعناه $z = 2\sqrt{3}+i$ أو

$z^2+\left(2\sqrt{3}+i\right)z+\left(2\sqrt{3}+i\right)^2=0$ ؛ $\Delta = \left(2\sqrt{3}+i\right)^2 - 4\left(2\sqrt{3}+i\right)^2 = -3\left(2\sqrt{3}+i\right)^2$.

$z^3 = 18\sqrt{3}+35i$ معناه $z = 2\sqrt{3}+i$ أو $z = \frac{-2\sqrt{3}-i-i\sqrt{3}\left(2\sqrt{3}+i\right)}{2}$ أو $z = \frac{-2\sqrt{3}-i+i\sqrt{3}\left(2\sqrt{3}+i\right)}{2}$.

$z^3 = 18\sqrt{3}+35i$ معناه $z = 2\sqrt{3}+i$ أو $z = \frac{-\sqrt{3}-7i}{2}$ أو $z = \frac{-3\sqrt{3}+5i}{2}$.

3) نرمز بـ : z_1 ، z_2 و z_3 إلى حلول هذه المعادلة ؛ A ، B و C صورها في المستوي ، على الترتيب .

نضع $z_1 = 2\sqrt{3}+i$ ، $z_2 = \frac{-\sqrt{3}-7i}{2}$ و $z_3 = \frac{-3\sqrt{3}+5i}{2}$

أ ـ عيّن زاوية الدوران الذي مركزه مبدأ المعلم O ويحوّل النقطة B إلى النقطة C.

زاوية الدوران هي $\arg\left(\frac{z_3}{z_2}\right) = \arg\left(\frac{-3\sqrt{3}+5i}{-\sqrt{3}-7i}\right) = \arg\left(\frac{\left(-3\sqrt{3}+5i\right)\left(-\sqrt{3}+7i\right)}{\left(-\sqrt{3}-7i\right)\left(-\sqrt{3}+7i\right)}\right) = \arg\left(\frac{-26-26\sqrt{3}i}{52}\right)$

$\arg\left(\frac{z_3}{z_2}\right) = \arg\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right) = -\frac{2®}{3}$.

ب ـ عيّن صورة بهذا الدوران للمستقيم Δ شعاع توجيهه $\vec{w}$ حيث : $(\vec{u};\vec{w}) = \frac{\text{®}}{2}$.

لدينا التعريف المركب لهذا الدوران هو $z' = az+b$ مع $a = e^{-i\frac{2\text{®}}{3}}$ و $b = z_O(1-a) = 0$ إذن $z' = e^{-i\frac{2\text{®}}{3}} z$.

المستقيم Δ الذي شعاع توجيهه $\vec{w}$ هو مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث $z = \text{ª} e^{i\frac{\text{®}}{2}}$ مع ª يمسح $\mathbb{R}$

إذن صورة Δ بالدوران هي مجموعة النقط M' لاحقتها z' حيث $z' = e^{-i\frac{2\text{®}}{3}} \times \text{ª} e^{i\frac{\text{®}}{2}}$ أي $z' = \text{ª} e^{-i\frac{\text{®}}{6}}$ وبالتالي صورة Δ بالدوران هي المستقيم Δ' شعاع توجيهه $\vec{w}'$ حيث : $(\vec{u};\vec{w}') = -\frac{\text{®}}{6}$.

تمرين 161 صفحة 159: نعتبر العددين المركبين $a = 3+i\sqrt{3}$ ، $b = 2+\sqrt{3}+3i$.

A ، B و C نقط من المستوي لواحقها a ، $\bar{a}$ و b على الترتيب .

1) بيّن أن المثلث ABO متساوي الساقين ، ثمّ عيّن z_G لاحقة مركز ثقله G .

2) ليكن $\sim$ و عددين مركبين وليكن T التحويل النقطي في المستوي الذي يحوّل $M(z)$ إلى $M'(z')$ حيث $z' = \sim z +$.

أ ـ عيّن $\sim$ و حيث يكون $T(O) = G$ و $T(A) = C$.

ب ـ بيّن أنّ التحويل T هو دوران يطلب تعيّين مركزه وزاويته .

جـ ـ استنتج صورة المستقيم (OA) بالدوران T.

حل التمرين:

1) لدينا $\frac{OA}{OB} = \frac{|a|}{|\bar{a}|} = 1$ معناه $OA = OB$ أي المثلث ABO متساوي الساقين. $z_G = \frac{0+a+\bar{a}}{3} = \frac{2}{3}\mathrm{Re}(a) = 2$.

2) ليكن $\sim$ و عددين مركبين وليكن T التحويل النقطي في المستوي الذي يحوّل $M(z)$ إلى $M'(z')$ حيث $z' = \sim z +$.

أ ـ عيّن $\sim$ و حيث يكون $T(O) = G$ و $T(A) = C$.

$T(O) = G$ معناه $z_G = \sim z_O +$ أي $= 2$ و $T(A) = C$ معناه $z_C = \sim z_A +$ أي $2+\sqrt{3}+3i = \sim(3+i\sqrt{3})+2$

ومعناه $\sim = \frac{\sqrt{3}+3i}{3+i\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}+3i)(3-i\sqrt{3})}{(3+i\sqrt{3})(3-i\sqrt{3})} = \frac{6\sqrt{3}+6i}{12} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$ وبالتالي $\sim = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$ و $= 2$.

ب ـ بيّن أنّ التحويل T هو دوران يطلب تعيّين مركزه وزاويته .

لتعريف المركب للتحويل T هو $z' = \frac{\sqrt{3}+i}{2} z + 2$. لدينا $|\sim| = \left|\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right| = 1$ إذن T هو دوران،

ولدينا $\arg(\sim) = \arg\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right) = \frac{\text{®}}{6}$ وهي زاوية الدوران T.

$\frac{}{1-\sim} = \frac{2}{1-\frac{\sqrt{3}+i}{2}} = \frac{4}{2-\sqrt{3}-i} = \frac{8-4\sqrt{3}+4i}{(2-\sqrt{3})^2+1} = \frac{8-4\sqrt{3}+4i}{8-4\sqrt{3}} = 1+\frac{1}{2-\sqrt{3}}i = 2+(2+\sqrt{3})i$ إذن مركز

الدوران T هي النقطة $D(2;2+\sqrt{3})$.

جـ ـ استنتج صورة المستقيم (OA) بالدوران T.

لدينا صورة مستقيم بالدوران هي مستقيم بما أن $T(O)=G$ و $T(A)=C$ فإن صورة المستقيم (OA) بالدوران T هي المستقيم (CG).

تمرين 162 صفحة 159: المستوي منسوب إلى المعلم $(O;\vec{u};\vec{v})$، لتكن النقطتان A و B صورتي العددين المركبين $a=4+2i$ و $b=3-i$ على الترتيب.

أ ـ بين أن المثلث OAB قائم ومتقايس الساقين.

ب ـ عين مركز وزاوية الدوران الذي يحول النقطة A إلى النقطة B، والنقطة B إلى النقطة O .

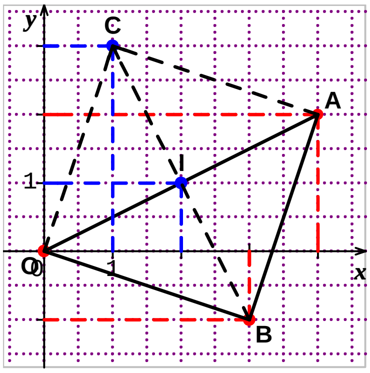
جـ ـ لتكن النقطة C صورة النقطة O بهذا الدوران. ما هي طبيعة الرباعي $ABOC$ ؟

حل التمرين:

أ ـ تبيان أن المثلث OAB قائم ومتقايس الساقين.

لدينا لاحقة الشعاع $\overrightarrow{BA}$ هي العدد المركب $a-b=1+3i$ ؛ $\frac{a-b}{b}=\frac{1+3i}{3-i}=\frac{(1+3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\frac{10}{10}i=e^{i\frac{®}{2}}$

وبالتالي: $\left|\frac{a-b}{a}\right|=1=\frac{BA}{OB}$ و $(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{BA})=\frac{®}{2}+2k®$ أي المثلث OAB قائم في B ومتقايس الساقين.



ب ـ تعيين مركز وزاوية الدوران الذي يحول النقطة A إلى النقطة B، والنقطة B إلى النقطة O.

نقطة تقاطع محاور المثلث OAB هي I منتصف الوتر $[OA]$ ومنه $IA=IB=IO$

و $(\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IB})=(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IA})=-\frac{®}{2}+2k®$ وبالتالي مركز الدوران هو النقطة I وزاويته $-\frac{®}{2}$.

جـ ـ لتكن النقطة C صورة النقطة O بهذا الدوران. تعيين طبيعة الرباعي $ABOC$:

لدينا $IO=IC$ و $(\overrightarrow{IO};\overrightarrow{IC})=-\frac{®}{2}+2k®$ ومنه القطعتان $[OA]$ و $[BC]$ متناصفتان ومتعامدتان ومتقاستان إذن الرباعي $ABOC$ هو مربع.

تمرين 163 صفحة 159: النقطتان A و B صورتا العددين المركّبين $z_1=3-2i$ و $z_2=-1+6i$ على الترتيب ، في مستو مزوّد بالمعلم $(O;\vec{u};\vec{v})$. µ نقطة من حامل محور الفواصل و r الدوران الذي مركزه µ و يحوّل A إلى B.

. عيّن مركز و زاوية الدوران r.

حل التمرين:

بما أن µ نقطة من حامل محور الفواصل فإن لاحقتها عدد حقيقي x ولدينا $µA=µB$ معناه $|z_1-x|=|z_2-x|$ أي $|3-x-2i|=|-1-x+6i|$ ويكافئ $(3-x)^2+4=(-1-x)^2+36$ ومعناه $9+x^2-6x+4=1+x^2+2x+36$ معناه $-8x=24$ أي $x=-3$ وبالتالي $µ(3;0)$.

لدينا $\frac{z_2-z_µ}{z_1-z_µ}=\frac{2+6i}{6-2i}=\frac{(1+3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}=i$ ومنه زاوية الدوران r هي $\frac{®}{2}$.

تمرين 164 صفحة 159: النقط A ، B ، C و D لواحقها على الترتيب $2i$ ، 6 ، $1+i$ و $5-i$.

و ~ عددان مركّبان ، t تحويل نقطي في المستوي يحول $M(z)$ إلى $M'(z')$ حيث $z'=3~z+$.

أ ـ عيّن ~ و علما أن $t(A)=B$ و $t(C)=D$.

ب ـ ما هي طبيعة التحويل t مع تعيّين عناصره المميّزة ؟

حل التمرين:

أ ـ تعيين $\sim$ و علما أن $t(A)=B$ و $t(C)=D$.

$t(A)=B$ معناه $z_B=3\sim z_A+$ و $t(C)=D$ معناه $z_D=3\sim z_C+$

إذن $z_D-z_B=3\sim(z_C-z_A)$ أي $\sim=\dfrac{z_D-z_B}{3(z_C-z_A)}=\dfrac{5-i-6}{3(1+i-2i)}=\dfrac{(-1-i)(1+i)}{3(1-i)(1+i)}=\dfrac{-2i}{3\times 2}=-\dfrac{1}{3}i$

$z_B=3\sim z_A+$ معناه $=z_B-3\sim z_A=6-3\left(-\dfrac{1}{3}i\right)(2i)=4$ ؛ وبالتالي $\sim=-\dfrac{1}{3}i$ و $=4$.

ب ـ طبيعة التحويل t مع تعيّين عناصره المميّزة :

لدينا t معرف بـ : $z'=-iz+4$ لدينا $|-i|=1$ ومنه t دوران زاويته $\arg(-i)=-\dfrac{®}{2}$ مركزه هو صورة العدد المركب $\dfrac{4}{1-i}=2+2i$.

تمرين 165 صفحة 160: $A(2;1)$ و $B(3;0)$ نقطتان من المستوى .

h التحاكي ذو المركز A والنسبة $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ ؛ r الدوران ذو المركز B والزاوية $-\dfrac{®}{4}$ ؛ t الانسحاب ذو الشعاع $\overrightarrow{BO}$.

أ ـ اكتب العبارة المركبة لكل من التحويلات الثلاث .

ب ـ أكتب العبارة المركّبة للتحويل $(t\circ r\circ h)$.

ج ـ عيّن النقطة C حيث $(t\circ r\circ h)(C)=O$.

حل التمرين:

أ ـ العبارة المركبة للتحاكي h: $z'=az+b$ مع $a=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ و $z_A=\dfrac{b}{1-a}$ أي

$b=2+i+\dfrac{\sqrt{2}}{4}(2+i)=2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)i$. إذن $z'=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}z+2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)i$

العبارة المركبة للدوران r: $z'=az+b$ مع $a=\cos-\dfrac{®}{4}+i\sin-\dfrac{®}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ و $z_B=\dfrac{b}{1-a}$ أي $b=z_B(1-a)$

معناه $b=3-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}i$ إذن $z'=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)z+3-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}i$

العبارة المركبة للانسحاب t: لدينا $\overrightarrow{BO}(-3;0)$ إذن $z'=z-3$

ب ـ أكتب العبارة المركّبة للتحويل $(t\circ r\circ h)$.

نضع $h(z)=z_1$ و $r(z_1)=z_2$ و $t(z_2)=z'$.

$h(z)=z_1$ معناه $z_1=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}z+2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)i$ ؛

$r(z_1)=z_2$ معناه $z_2=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)z_1+3-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}i$ ؛ $t(z_2)=z'$ معناه $z'=z_2-3$.

$(t\circ r\circ h)(z)=(t\circ r)(h(z))=(t\circ r)(z_1)=t(r(z_1))=t(z_2)=z'$.

$z'=z_2-3$ إذن $z'=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)z_1+3-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}i-3$ أي $z'=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)z_1-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}i$

ومنه $z'=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}z+2+\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(1+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)i\right)-\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}i$ أي

$z'=\frac{1}{4}(1-i)z+\sqrt{2}-\sqrt{2}i+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{4}\right)i+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{4}-\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}i$ ومعناه

$z'=\frac{1}{4}(1-i)z+\frac{3}{4}+\left(\sqrt{2}-\frac{1}{4}\right)i$ وهي التعريف المركب للتحويل $(t\circ r\circ h)$

ج ـ عيّن النقطة C حيث $(t\circ r\circ h)(C)=O$.

$(t\circ r\circ h)(C)=O$ معناه $\frac{1}{4}(1-i)z_C+\frac{3}{4}+\left(\sqrt{2}-\frac{1}{4}\right)i=0$ أي $(1-i)z_C=-3-\left(4\sqrt{2}-1\right)i$ ومعناه

$$z_C=\frac{-3-\left(4\sqrt{2}-1\right)i}{(1-i)}=\frac{\left[-3-\left(4\sqrt{2}-1\right)i\right](1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{-3-3i-\left(4\sqrt{2}-1\right)i+4\sqrt{2}-1}{2}=-2+2\sqrt{2}-\left(2\sqrt{2}+1\right)i$$

إذن $C\left(-2+2\sqrt{2};-2\sqrt{2}-1\right)$.

تمرين 166 صفحة 160: (بكالوريا)

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-(2+i)z+3+i=0$.

نرمز للحلين بـ z_0 و z_1 حيث $|z_0|>|z_1|$.

2) A ، B و C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب 1 ، z_0 و z_1 .

أوجد إحداثيي النقطة G مركز المسافات المتساوية للنقط A ، B و C.

3) T التحويل النقطي في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M النقطة M' حيث : $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$.

أ . بيّن أن $\overrightarrow{GM'}=-2\overrightarrow{GM}$.

ب . استنتج طبيعة التحويل T وعناصره المميّزة .

ج . أكتب العبارة المركبة للتحويل T .

4) A' ، B' و C' صور النقط A ، B و C على الترتيب بالتحويل T . بيّن أن النقط A' ، B' و C' في استقامية .

حل التمرين:

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-(2+i)z+3+i=0$. نرمز للحلين بـ z_0 و z_1 حيث $|z_0|>|z_1|$.

$\Delta=(2+i)^2-4(3+i)=4-1+4i-12-4i=-9=(3i)^2$ ؛ $z'=\frac{2+i-3i}{2}=1-i$ ، $z''=\frac{2+i+3i}{2}=1+2i$.

$|z'|=\sqrt{2}$ و $|z''|=\sqrt{5}$ إذن $z_0=1+2i$ و $z_1=1-i$.

2) A ، B و C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب 1 ، z_0 و z_1 .

أوجد إحداثيي النقطة G مركز المسافات المتساوية للنقط A ، B و C.

$z_G=\frac{1+z_0+z_1}{3}=1+\frac{1}{3}i$ إذن $G\left(1;\frac{1}{3}\right)$.

3) T التحويل النقطي في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M النقطة M' حيث : $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$.

أ ـ تبيان أن $\overrightarrow{GM'}=-2\overrightarrow{GM}$.

$\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ معناه $\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GM'}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}$ ومعناه

$\overrightarrow{GM'}=2\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$. بما أن النقطة G مركز المسافات المتساوية للنقط A ، B و C فإن

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ وبالتالي $\overrightarrow{GM'}=2\overrightarrow{MG}$ أي $\overrightarrow{GM'}=-2\overrightarrow{GM}$.

ب ـ طبيعة التحويل T وعناصره المميّزة: لدينا $\overrightarrow{GM'}=-2\overrightarrow{GM}$ إذن T هو التحاكي ذو المركز G والنسبة -2.

جـ ـ العبارة المركبة للتحويل T: $z'=-2z+(1+2)z_G$ أي $z'=-2z+3+3i$.

4) A'، B' و C' صور النقط A، B و C على الترتيب بالتحويل T . بيّن أن النقط A'، B' و C' في استقامية .

لدينا $\frac{z_0-1}{z_1-1}=\frac{2i}{-i}=-2$ ومنه $\frac{z_0-1}{z_1-1}$ عدد حقيقي سالب إذن $\arg\left(\frac{z_0-1}{z_1-1}\right)=® +2k®$ أي $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطيا

وبالتالي النقط A، B و C في استقامية ولدينا التحاكي يحافظ على الاستقامية إذن النقط A'، B' و C' هي كذلك في استقامية.

تمرين 167 صفحة 160: A ، B و C ثلاث نقط من المستوي المركب ، لواحقها على الترتيب:

$z_A=2+2i$ ، $z_B=5+5i$ و $z_C=-2-2i$.

أ ـ أثبت أنّ $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ هو عدد حقيقي .

ب ـ استنتج طبيعة التحويل T الذي يحوّل B إلى C و A نقطته الصامدة الوحيدة .

جـ ـ أكتب العبارة المركّبة للتحويل T.

د ـ Γ المنحني ذي المعادلة $y=3x-\frac{1}{x}$.

أكتب معادلة لصورة المنحني Γ بالتحويل T .

حل التمرين:

أ ـ $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{-2-2i-2-2i}{5+5i-2-2i}=\frac{-4-4i}{3+3i}=-\frac{4}{3}$ وهو عدد حقيقي .

ب ـ لدينا $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=-\frac{4}{3}$ معناه $z_C-z_A=-\frac{4}{3}(z_B-z_A)$ ومعناه $\overrightarrow{AC}=-\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$ إذن التحويل T الذي يحوّل B إلى C

و A نقطته الصامدة الوحيدة هو التحاكي ذي المركز A والنسبة $-\frac{4}{3}$.

جـ ـ العبارة المركّبة للتحويل T: $z'=-\frac{4}{3}z+\left(1+\frac{4}{3}\right)z_A=-\frac{4}{3}z+\frac{7}{3}(2+2i)$ أي

د ـ Γ المنحني ذي المعادلة $y=3x-\frac{1}{x}$.

$z'=-\frac{4}{3}z+\frac{14}{3}+\frac{14}{3}i$ معناه $3z'-14-14i=-4z$ أي $z=-\frac{1}{4}(3z'-14-14i)$

وبالتالي $x=-\frac{1}{4}(3x'-14)$ و $y=-\frac{1}{4}(3y'-14)$ ومنه $-\frac{1}{4}(3y'-14)=-\frac{3}{4}(3x'-14)+\frac{4}{3x'-14}$

$(3y'-14)=3(3x'-14)-\frac{16}{3x'-14}$ ؛ $y'=(3x'-14)-\frac{16}{3(3x'-14)}+\frac{14}{3}$ ؛ $y'=3x'-\frac{16}{3(3x'-14)}-\frac{28}{3}$.