

التصحيح	
التمرين الأول :	
	(1) المعادلة ذات المجهول المركب z التالية : $z^2 - 8z + 17 = 0$
0.5 + 2 × 0.25	<ul style="list-style-type: none"> • $z^2 - 8z + 17 = 0$: - حساب المميز Δ : $\Delta = (-8)^2 - 4(1) \times (17) = -4$ - $\Delta = (2i)^2$ - المعادلة تقبل حلين هما : $z_2 = \frac{8+2i}{2} = 4+i$ $z_1 = \frac{8-2i}{2} = 4-i$ • $S = \{4-i; 4+i\}$:
	(2) (O, \vec{u}, \vec{v}) D, B, A التي لواحقها على الترتيب $a = 4-i, b = 4+i, d = -i$ وليكن R و Ω $\tilde{S} = 2$ و زاويته $\frac{f}{2}$ (بين أن العبارة المركبة للدوران R : $z' = iz + 2 - 2i$)
0.75	<ul style="list-style-type: none"> • تبيان أن العبارة المركبة للدوران R : $z' = iz + 2 - 2i$: - العبارة المركبة للدوران R من الشكل : $z' - \tilde{S} = e^{i\frac{f}{2}}(z - \tilde{S})$ ومنه $z' - 2 = i(z - 2)$ • $z' = iz + 2 - 2i$
	($c = 1 + 2i$ هي R B C)
0.25	<ul style="list-style-type: none"> • $c = 1 + 2i$ هي R B C • لدينا : $R(B) = C$ يعني $c = i \times b + 2 - 2i = i(4+i) + 2 - 2i = 4i - 1 + 2 - 2i = 1 + 2i$ • $c = 1 + 2i$
	(بين أن : $\frac{c-d}{c-b} = -i$ ثم أستنتج طبيعة المثلث BCD .
0.5	<ul style="list-style-type: none"> • تبيان $\frac{c-d}{c-b} = -i$: - لدينا : $\frac{c-d}{c-b} = \frac{1+2i-(-i)}{1+2i-(4+i)} = \frac{1+3i}{-3+i} = \frac{(1+3i)(-3-i)}{(-3+i)(-3-i)}$ ومنه $\frac{c-d}{c-b} = \frac{-3-i-9i+3}{9+1} = \frac{-10i}{10} = -i$

• استنتاج طبيعة المثلث BCD :

0.25 + 0.25

- لدينا : $\left| \frac{c-d}{c-b} \right| = |-i| = 1$ ولدينا $\arg\left(\frac{c-d}{c-b}\right) = \arg(-i) = -\frac{f}{2}$

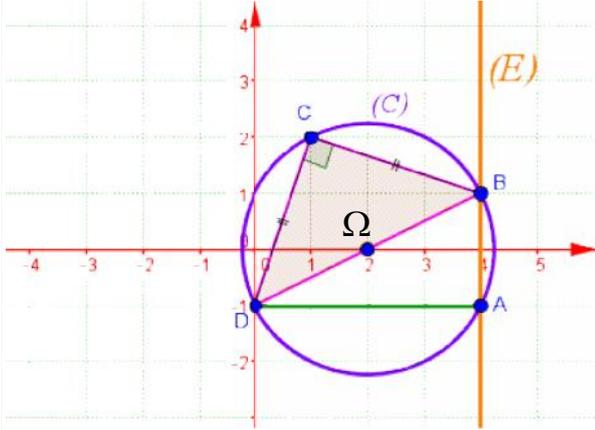
- يعني $\frac{DC}{BC} = 1$ أي $DC = BC$ و $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DC}) = -\frac{f}{2}$ أي $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{DC}$

BCD ومتساوي الساقين **C**

(بين أن النقط C, B, A تنتمي الى نفس الدائرة يطلب تعيين مركزها نصف قطرها

• تبيان D, C, B, A

0.5



المثلث BCD قائم في C وبالتالي النقط D, C, B تنتمي الى دائرة مركزها منتصف الوتر أي Ω .

ولدينا :

$$\Omega A = |z_A - z_\Omega| = |4 - i - 2| = |2 - i|$$

$$\Omega A = \sqrt{5}$$

0.5

إذن : $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D = \sqrt{5}$

ومنه النقط C, B, A و D تنتمي الى نفس الدائرة

مركزها $\Omega(2;0)$ ونصف قطرها $R = \sqrt{5}$.

z بحيث يكون ،

(عين (E) M

$$|-i - z|^2 - |4 - i - z|^2 = 16$$

• تعيين مجموعة النقط (E) : $|-i - z|^2 - |4 - i - z|^2 = 16$:

$$MD^2 - MA^2 = 16 \text{ يعني } |-i - z|^2 - |4 - i - z|^2 = 16$$

ولتكن النقطة I منتصف القطعة $[DA]$

$$(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ID})^2 - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 = 16 \text{ : ولدينا}$$

$$\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{ID}^2 - \overrightarrow{MI}^2 - 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IA}^2 = 16 \text{ أي}$$

$$\text{ومنه } 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{ID} - 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} = 16 \text{ لان } \overrightarrow{ID}^2 = \overrightarrow{IA}^2 \text{ (منتصف القطعة } [DA])$$

$$\text{وبالتالي : } 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{ID} - \overrightarrow{IA}) = 16 \text{ أي } 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{AD} = 16$$

$$\text{إذن : } \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{DA} = 8$$

لتكن H المسقط العمودي للنقطة M على (DA) حيث $\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{DA} = 8$

$$\text{أي } \overrightarrow{IH} \times \overrightarrow{DA} = 8$$

- ولدينا : $DA = |z_A - z_D| = |4 - i + i| = |4| = 4$ وبالتالي $\overrightarrow{IH} = 2$

$$\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{DA} = 8$$

$$\text{إذن } \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{DA} = 8 \text{ يعني } (\overrightarrow{IH} + \overrightarrow{HM}) \cdot \overrightarrow{DA} = 8$$

$$\text{ومنه } \overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{DA} = 8 \text{ أي } 8 + \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{DA} = 8$$

$$\text{وبالتالي } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DA} = 0 \text{ (لان } H = A)$$

A (E) هي المستقيم العمودي على (DA)

01

$$(E) = (AB)$$

طريقة أخرى :

$$|-i-x-iy|^2 - |4-i-x-iy|^2 = 16 \text{ يعني } |-i-z|^2 - |4-i-z|^2 = 16$$

$$|-x+i(-1-y)|^2 - |4-x+(-1-y)|^2 = 16 \text{ ومنه :}$$

$$\text{أي } (-x)^2 + (-1-y)^2 - (4-x)^2 - (-1-y)^2 = 16 \text{ ومنه}$$

$$x^2 - 16 + 8x - x^2 = 16$$

$$\text{ومنه : } 8x = 32$$

$$x = 4 \text{ هي المستقيم ذي المعادلة } x = 4$$

$$A \quad (x'x)$$

التمرين الثاني :

نعتبر النقطتين $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$M(x, y, z)$$

$$(P) \quad I(3, -1, 0), A(2, 1, 1)$$

$$MA^2 - \vec{MA} \cdot \vec{MI} = 0$$

$$(P)$$

(1) بين أن النقطة A

0.5

• تبيان أن النقطة A (P) :

$$- \text{ لدينا : } AA^2 - \vec{AA} \cdot \vec{AI} = 0 \text{ ومنه } A \in (P)$$

(بين أن المجموعة (P) هي مستو $x - 2y - z + 1 = 0$ ديكارتية له.

0.5

• تبيان أن (P) هي مستو $x - 2y - z + 1 = 0$ ديكارتية له:

$$- \text{ لدينا : } MA^2 - \vec{MA} \cdot \vec{MI} = 0 \text{ يعني } \vec{MA}^2 - \vec{MA} \cdot \vec{MI} = 0$$

$$\text{ومنه } \vec{MA} \cdot (\vec{MA} + \vec{IM}) = 0 \quad \vec{MA} \cdot (\vec{MA} - \vec{MI}) = 0$$

$$\vec{AM} \cdot \vec{AI} = 0$$

$$\vec{MA} \cdot \vec{IA} = 0$$

(P) هي مستو \vec{IA} شعاع ناظمي له و يمر من النقطة A

- تعيين معادلة ديكارتية للمستوي (P) :

$$\vec{AI}(1; -2; -1) \text{ لدينا :}$$

$$\text{معادلة } (P) \quad x - 2y - z + d = 0$$

- تعيين قيمة d : نعوض بإحداثيات النقطة A : $2 - 2(1) - 1 + d = 0$

$$\text{ومنه } d = 1 \text{ هي } (P) \quad x - 2y - z + 1 = 0$$

	<p>(2) (S) سطح كرة مركزها النقطة I .A</p> <p>▪ (S) هو $R = \sqrt{6}$ ثم عين معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S)</p>
0.5	<p>• (S) هو $R = \sqrt{6}$</p> <p>- لدينا : $R = AI = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$</p> <p>- تعيين معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S) :</p>
0.5	<p>$(x-3)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 6$</p>
	<p>(3) ليكن (P') $2x - y + z - 4 = 0$</p> <p>(بين أن (P') يقطع (S)) (C) يطلب تعيين مركزها H ونصف قطرها r.</p>
0.25	<p>• تبيان أن (P') (S) (C) :</p> <p>- لدينا : $d(I, (P')) = \frac{ 2(3) - (-1) + 0 - 4 }{\sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (1)^2}} = \frac{ 3 }{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$</p> <p>أي لدينا : $d(I, (P')) < R$ ومنه (P') (S) (C)</p>
	<p>• تعيين مركز الدائرة (C) ونصف قطرها :</p>
	<p>- تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) I (S) (P') :</p> $(\Delta): \begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = -t - 1; (t \in \mathbb{R}) \\ z = t \end{cases}$
0.75	<p>- تعيين نقطة تقاطع المستقيم (Δ) (P') :</p> $\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = -t - 1 \\ z = t \\ 2x - y + z - 4 = 0 \end{cases}$ <p>نحل لجملة :</p> <p>إذن : $2(2t + 3) - (-t - 1) + t - 4 = 0$ ومنه $6t + 3 = 0$</p>

$$H\left(2; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right) \text{ أي } \begin{cases} x=2 \\ y=-\frac{1}{2} \\ z=-\frac{1}{2} \end{cases} \text{ وبالتالي } t = -\frac{1}{2} \text{ وبالتالي}$$

$$r = \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad r = \sqrt{R^2 - d^2(I, (P'))} = \sqrt{6 - \frac{6}{4}} : (C)$$

$$(C) \quad [AB] \quad B(2; -2; -2) \quad ($$

0.5

• $[AB] : (C)$

- لدينا : $AB = \sqrt{(2-2)^2 + (-2-1)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} = 2r$

$(C) \quad [AB]$

أكتب معادلة ديكرتية للمستوي (Q) . B (S)

0.5

• كتابة معادلة ديكرتية للمستوي (Q) :

- شعاع $\vec{IB}(-1; -1; -2)$ ناظمي للمستوي (Q) .

- معادلة (Q) من الشكل $-x - y - 2z + d = 0$

- لتعيين قيمة d نعوض بإحداثيات النقطة B نجد : $-(2) - (-2) - 2(-2) + d = 0$ أي $d = -4$

إذن : $(Q) : -x - y - 2z - 4 = 0$

Algèbre

Graphique 3D

Plan

- P: $2x - y + z = 4$
- Q: $-x - y - 2z = 4$

Point

- A = (2, 1, 1)
- B = (2, -2, -2)
- H = (2, -0.5, -0.5)
- I = (3, -1, 0)

Segment

- e = 4.24

Sphère

- S: $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 6$

التمرين الثالث :

$(E) : y' - 2y = -4x$ المعادلة التفاضلية \mathbb{R}

1) عين العددين الحقيقيين s, r بحيث تكون الدالة $\{ (x) = rx + s :$

(E)

01	<p>▪ تعيين العددين الحقيقيين s, r:</p> <p>▪ الدالة $\{ (x) - 2\{ (x) = -4x$ يعني (E) المعادلة ومنه $r - 2(r x + s) = -4x$ أي $r - 2r x - 2s = -4x$ وبالتالي: $-2r x + r - 2s = -4x$</p> <p>- بالمطابقة نجد: $\begin{cases} -2r = -4 \\ r - 2s = 0 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} r = 2 \\ s = 1 \end{cases}$ وبالتالي $\{ (x) = 2x + 1$</p>
	<p>(2) \mathbb{R} المعادلة التفاضلية: $(E'): y' - 2y = 0$. بين أن الدالة f (E) $(f - \{)$ (E')</p>
01	<p>▪ نبرهن أنه إذا كان f (E) $(f - \{)$ (E') - f حلا للمعادلة (E) يعني $f'(x) - 2f(x) = -4x$ يعني $f'(x) - 2f(x) = \{ '(x) - 2\{ (x)$ ومنه: $f'(x) - \{ '(x) - 2f(x) + 2\{ (x) = 0$ ومنه: $(f' - \{ ')(x) - 2(f - \{)(x) = 0$ ومنه: (E') $(f - \{)$</p> <p>▪ نبرهن أنه إذا كان $(f - \{)$ (E) f (E') - $(f - \{)$ حلا للمعادلة (E') يعني $(f - \{)'(x) - 2(f - \{)(x) = 0$ ومنه $f'(x) - \{ '(x) - 2f(x) + 2\{ (x) = 0$ أي $f'(x) - 2f(x) = \{ '(x) - 2\{ (x)$ وبالتالي: $f'(x) - 2f(x) = -4x$ ومنه f (E)</p> <p>(E') $(f - \{)$ (E) f</p>
	<p>(E) (E')</p>
0.5 + 0.5	<p>▪ (E') - هي الدوال من الشكل $y = ke^{2x}$ - (E) هي الدوال من الشكل: $f(x) = ke^{2x} + \{ (x) = ke^{2x} + 2x + 1$</p>
	<p>(عين حلا خاصا f (E) والذي يحقق ، $f(0) = 3$</p>
01	<p>▪ تعيين الحل الخاص f حيث $f(0) = 3$: $f(0) = 3$ يعني $ke^{2 \times 0} + 2(0) + 1 = 3$ ومنه $k + 1 = 3$ أي $k = 2$ - وبالتالي: $f(x) = 2e^{2x} + 2x + 1$</p>
التمرين الرابع :	
	<p>نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$: $f(x) = x + 3 \ln\left(\frac{x^2 + 2}{3x}\right)$</p>

نسمي (C_f) المنحني الممثل لها في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) .

I. 1) أحسب نهايتي الدالة f 0 $+\infty$.

• حساب نهايتي الدالة f :

0.25 + 0.25

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^2 + 2}{3x} \right) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left(\frac{x^2 + 2}{3x} \right) = +\infty \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + 3 \ln \left(\frac{x^2 + 2}{3x} \right) \right) = +\infty -$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2}{3x} \right) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x^2 + 2}{3x} \right) = +\infty \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 3 \ln \left(\frac{x^2 + 2}{3x} \right) \right) = +\infty -$$

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x^2 + 4x + 6)}{x(x^2 + 2)} \quad x$$

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي

استنتج اتجاه تغير الدالة f

• $f'(x)$

0.75

$$f'(x) = 1 + 3 \times \frac{2x(3x) - 3(x^2 + 2)}{(3x)^2} = 1 + 3 \times \frac{6x^2 - 3x^2 - 6}{9x^2} \times \frac{3x}{x^2 + 2}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{6x^2 - 3x^2 - 6}{9x^2} \times \frac{9x}{x^2 + 2} = 1 + \frac{3x^2 - 6}{x(x^2 + 2)} = \frac{x^3 + 3x^2 + 2x - 6}{x(x^2 + 2)}$$

وبالتالي: $f'(x) = \frac{(x-1)(x^2 + 4x + 6)}{x(x^2 + 2)}$ من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x

• استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

0.5

$$\frac{(x-1)(x^2 + 4x + 6)}{x(x^2 + 2)} = 0 \quad \text{يعني} \quad f'(x) = 0$$

ومنه $x - 1 = 0$ أو $x^2 + 4x + 6 = 0$ (ليس لها حل لان $\Delta = 16 - 24 = -8 < 0$) مع $x \in]0; +\infty[$

ومنه $x = 1$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $(x-1)(x^2+4x+6)$ لأن $x(x^2+2) > 0$

$x-1$	0	-	0	+	$+\infty$
x^2+4x+6		+		+	
$f'(x)$		-	0	+	

f - [0;1] و متزايدة على المجال $[1;+\infty[$.

(3) شكل جدول تغيرات الدالة f .

• جدول تغيرات الدالة f :

0.5

x	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$		1		$+\infty$

(4) $y = x$ (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ)

• $y = x$ (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

- ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$

- لدينا: $f(x) - y = x + 3\ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right) - x = 3\ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right)$

- $3\ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right) = 0$ يعني $f(x) - y = 0$

ومنه $\ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right) = 0$ $\frac{x^2+2}{3x} = 1$

- $x^2 + 2 = 3x$

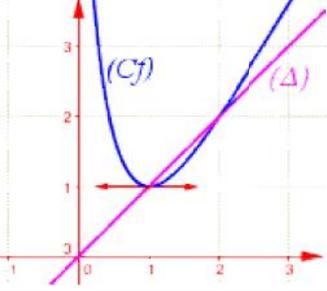
$x^2 - 3x + 2 = 0$:

- حساب المميز: $\Delta = (-3)^2 - 4(1)(2) = 9 - 8 = 1$

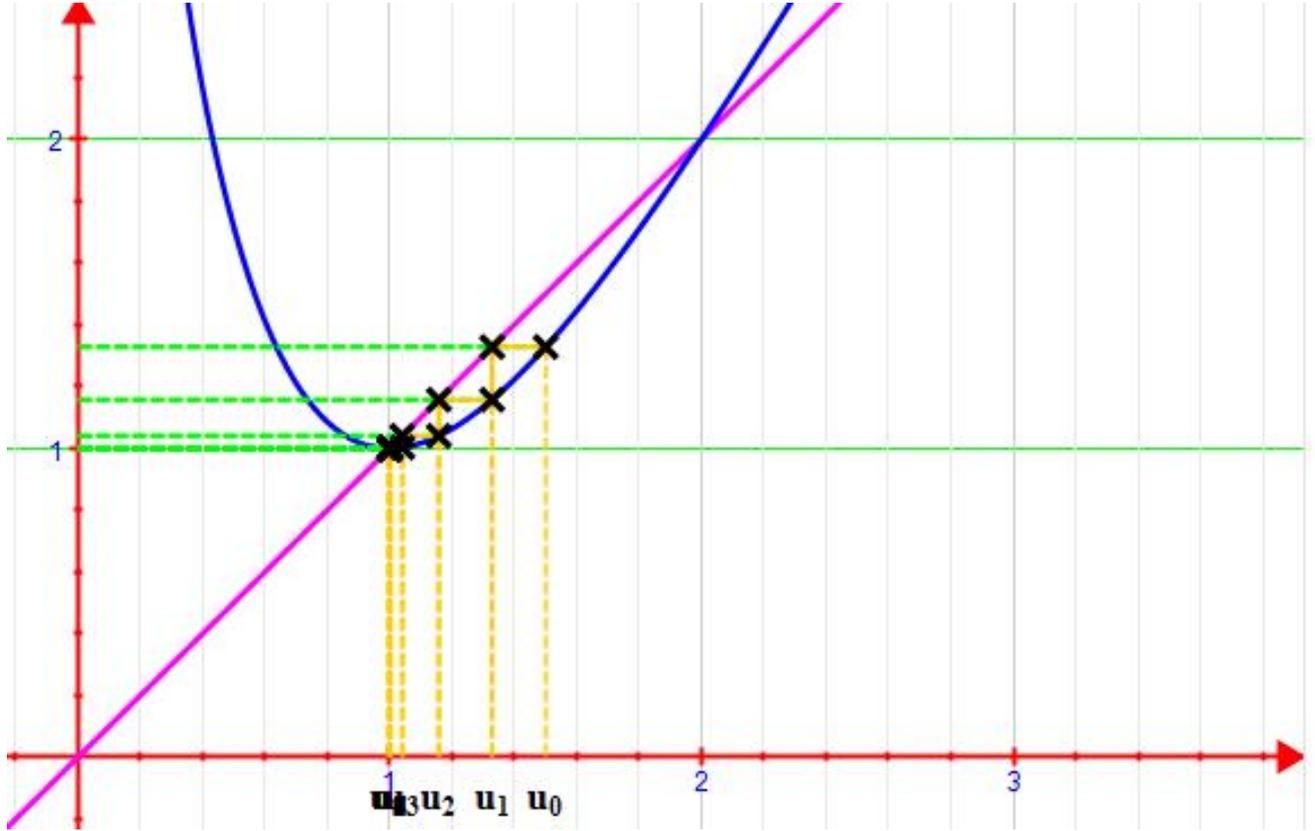
المعادلة تقبل حلين متمايزين هما: $x_1 = \frac{3+1}{2} = 2$ ، $x_1 = \frac{3-1}{2} = 1$

01

x	0	1	2	$+\infty$		
$f(x) - y$		+	0	-	0	+
		(C_f) يقع	(C_f) يقع	(C_f) يقع	(Δ) فوق	(C_f) يقع
		(Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(Δ) فوق

	(C_f) (Δ)	$f(4)$	(5)
0.25 01		$f(4) = 4 + 3 \ln \left(\frac{16+2}{3 \times 4} \right) = 4 + 3 \ln \frac{18}{12} = 5.22$	• $f(4)$ - •
	<p>II. نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $u_0 = \frac{3}{2}$ من أجل كل عدد طبيعي n</p> <p>$u_{n+1} = f(u_n)$</p> <p>(1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n $1 < u_n < 2$.</p>		
0.75	<p>• البرهان بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي n $1 < u_n < 2$:</p> <p>- نسمي هذه الخاصية $P(n)$.</p> <p>-1 من أجل $n = 0$ لدينا:</p> <p>$u_0 = \frac{3}{2}$ إذن $1 < u_0 < 2$ ومنه $P(0)$ صحيحة.</p> <p>-2 نفرض صحة $P(n)$ أي نفرض أن $1 < u_n < 2$.</p> <p>ونبرهن على صحة $P(n+1)$ أي نبرهن أن $1 < u_{n+1} < 2$</p> <p>لدينا: $1 < u_n < 2$ ومنه $f(1) < f(u_n) < f(2)$ لأن الدالة f متزايدة تماماً على المجال $]1; 2[$</p> <p>- ومنه $1 < u_{n+1} < 2$ لأن $u_{n+1} = f(u_n)$ و $f(1) = 1$ و $f(2) = 2$</p> <p>- أي $P(n+1)$ صحيحة.</p> <p>- حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.</p> <p>من أجل كل عدد طبيعي n $1 < u_n < 2$.</p>		
	<p>(2) أدرس رتبة المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ثم استنتج أنها متقاربة.</p>		
0.5	<p>• رتبة المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تغيرات المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$:</p> <p>$u_{n+1} - u_n = u_n + 3 \ln \left(\frac{u_n^2 + 2}{3u_n} \right) - u_n = 3 \ln \left(\frac{u_n^2 + 2}{3u_n} \right)$ لدينا:</p> <p>- بما أن $u_n \in]1; 2[$ فإن $3 \ln \left(\frac{u_n^2 + 2}{3u_n} \right) < 0$</p> <p>من أجل $x \in]1; 2[$ فإن $f(x) - x < 0$ ((4))</p> <p>• $u_{n+1} - u_n < 0$ ومنه المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$</p>		

0.5	<ul style="list-style-type: none"> • استنتاج أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية - المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ محدودة من الأسفل بالعدد 1 وهي متناقصة تماما فهي متقاربة وتتقارب من العدد 1.
	(3) عين نهاية المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
0.25	<ul style="list-style-type: none"> • تعيين نهاية المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$



© في البكالوريا 2015 ©



© بالتوفيق ©