تصحيح الاختبار الأول في مادة الرياضيات

التمرين الأول

① حلول المعادلة التفاضلية $2y'+y-3=0$ هي : $y'=ce^{\frac{-1}{2}x}+3$ **(الجواب ج)**

التبرير :

$2y'+y-3=0$ تكافيء $y'=\frac{-1}{2}y+\frac{3}{2}$ و هي من الشكل $y'=ay+b$ وحلها العام من الشكل $y=ce^{ax}-\frac{b}{a}$

② $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(2x+1)}{x}=2$ **(الجواب ب)**

التبرير :

بوضع $f(x)=\ln(2x+1)$ ومنه $f'(x)=\frac{2}{2x+1}$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(2x+1)-0}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(2x+1)-\ln(2(0)+1)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=\frac{2}{2(0)+1}=2$$

③ حلول المتراجحة $2e^{-2x}-e^{-x}-1\le0$ هي $S=[0;+\infty[$ **(الجواب ج)**

التبرير :

بوضع $X=e^{-x}$ نجد : $2X^2-X-1\le0$ وعليه نجد : $\Delta=9$ ومنه $\begin{cases}X_1=\frac{-1}{2}\\ X_2=1\end{cases}$

ومنه $2\left(e^{-x}-1\right)\left(e^{-x}+\frac{1}{2}\right)\le0$

$+\qquad 0\qquad -$

④ إذا كان $f(x)=\ln\left(e^{2x}+1\right)$ فإن (C_f) يقبل مقارب مائل معادلته $y=2x$ عند $+\infty$ **(الجواب ج)**

التبرير :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^{2x}+1\right)-2x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^{2x}\left(1+\frac{1}{e^{2x}}\right)\right)-2x\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln e^{2x}+\ln\left(1+\frac{1}{e^{2x}}\right)-2x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\cancel{2x}+\ln\left(1+\frac{1}{e^{2x}}\right)-\cancel{2x}=0$$

التمرين الثاني

ا) الدالة g المعرفة على $]0,+\infty[$ ب : $g(x)=1-(ax+b)e^{-x}$

① أ / **بقراءة بيانية تعيين كل من** $g(0)$ ؛ $g'(0)$ **:**

● $g(0)=-1$　　● $g'(0)=1$

● $\lim\limits_{h\to0}\frac{g(-1+h)-g(-1)}{h}=g'(-1)=0$　　● $\lim\limits_{x\to0}\frac{g'(x)-g'(0)}{x}=g''(0)=0$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=1$

③ باستعمال النتائج السابقة إثبات أن $a=1$ و $b=2$:

لدينا : $g'(x)=(ax+b-a)e^{-x}$

معناه $\begin{cases} g'(0)=1 \\ g(0)=-1 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} b-a=1 \\ 1-b=-1 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$ ومنه $\boxed{g(x)=1-(x+2)e^{-x}}$

④ f معرفة على $\mathbb{R}^*$ ب : $f(x)=g\left(\frac{1}{x}\right)$

أ / حساب $f'(x)$ باستعمال مشتق دالة مركبة :

$$f'(x)=g'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

لدينا $g'(x)=(x+1)e^{-x}$ ومنه نجد $g'\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}+1\right)e^{\frac{-1}{x}}$

ومنه

$$\begin{aligned} f'(x)&=g'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &=-\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x}+1\right)e^{\frac{-1}{x}} \end{aligned}$$

ب / دراسة اتجاه تغير f وإنشاء جدول تغيراتها :

لدينا $f'(x)=-\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x}+1\right)e^{\frac{-1}{x}}$ ومنه $f'(x)=\frac{-(x+1)}{x^3}e^{\frac{-1}{x}}$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $-x(x+1)$

- $f'(x)=0$ تكافيء $\frac{-(x+1)}{x^3}e^{\frac{-1}{x}}=0$ تكافيء $(x+1)=0$ و $x\neq 0$ ومنه $x=-1$
- $f'(x)\succ 0$ تكافيء $-x(x+1)\succ 0$ ومنه $x\in]-1;0[$ ومنه f متزايدة تماما على $]-1;0[$
- $f'(x)\prec 0$ تكافيء $-x(x+1)\prec 0$ ومنه $x\in]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$ ومنه f متناقصة تماما على $]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	||	-	
$f(x)$	-1	↘	$1-e$	↗	$+\infty$ || 1	↘	-1

التمرين الثالث :

الدالة f على $D_f =]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$ ب : $f(x)=\frac{x}{2}+\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

① حساب : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ؛ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} f(x)$ ؛ $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} f(x)$ ثم تفسير النتيجتين الأخيرتين هندسيا .

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{2}+\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=-\infty$ (لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{x}{x}\right)=0$)
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2}+\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=+\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}\frac{x}{2}+\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=-\infty$ (لأن $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}\left(\frac{x}{x-1}\right)=0^+$ و $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$)
- $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}\frac{x}{2}+\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=+\infty$ (لأن $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}\left(\frac{x}{x-1}\right)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$)

التفسير الهندسي :

- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} f(x)=-\infty$ ومنه المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (حامل محور التراتيب) مقارب ل (C) بجوار $-\infty$.
- $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} f(x)=+\infty$ ومنه المستقيم ذو المعادلة $x=1$ مقارب ل (C) بجوار $+\infty$.

② تبيان أنه من أجل كل x من D_f : $f'(x)=\frac{x^2-x-2}{2x(x-1)}$ ثم استنتاج اتجاه تغير f وإنشاء جدول تغيراتها

$$f'(x)=\frac{1}{2}+\frac{-1}{(x-1)^2}\times\frac{x-1}{x}$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{x(x-1)}$$
$$f'(x)=\frac{x^2-x-2}{2x(x-1)}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة x^2-x-2

$-\infty$		-1		0	1		2		$+\infty$
	+		-			-		+	

- f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty;-1]$ و $[2;+\infty[$.
- f متناقصة تماما على كل من المجالين $[-1;0[$ و $]1;2]$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-1		0	1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	‖	‖	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{-1}{2}-\ln 2$	↘	$-\infty$ ‖	‖ $+\infty$	↘	$1+\ln 2$	↗	$+\infty$

③ أ - تبيان أن (C) يقبل مستقيم مقارب مائل (D) و تعيين معادلة له :

بما أن $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=0$ فإن المستقيم $(D): y=\frac{x}{2}$ مقارب مائل للمنحنى (C) عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

ب – دراسة وضعية (C) بالنسبة إلى (D) :

لدينا $f(x)-\frac{x}{2}=\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

ندرس إشارة $\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

● $\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=0$ تكافيء $\frac{x}{x-1}=1$ تكافيء $\frac{x}{x-1}-1=0$ ومنه $\frac{1}{x-1}=0$

x	$-\infty$		0	1		$+\infty$
$\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$		-			+	

● (C) يقع فوق (D) من أجل $x\in]1;+\infty[$.

● (C) يقع تحت (D) من أجل $x\in]-\infty;0[$.

④ تبيان أن النقطة $\Omega\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$ هي مركز التناظر للمنحنى (C):

من أجل $x\in D_f$ ؛ $(1-x)\in D_f$ و

$$\bullet f(1-x)+f(x)=\frac{1-x}{2}+\ln\left(\frac{1-x}{1-x-1}\right)+\frac{x}{2}+\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{x}{2}+\ln\left(\frac{1-x}{-x}\right)+\frac{x}{2}+\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}+\ln\underbrace{\left(\frac{x-1}{x}\times\frac{x}{x-1}\right)}_{=1}$$
$$=2\left(\frac{1}{4}\right)$$

ومنه النقطة $\Omega\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$ هي مركز التناظر للمنحنى (C).

⑤ تبيان أن (C) يقبل مماسين معامل توجيه كل منهما 2- :

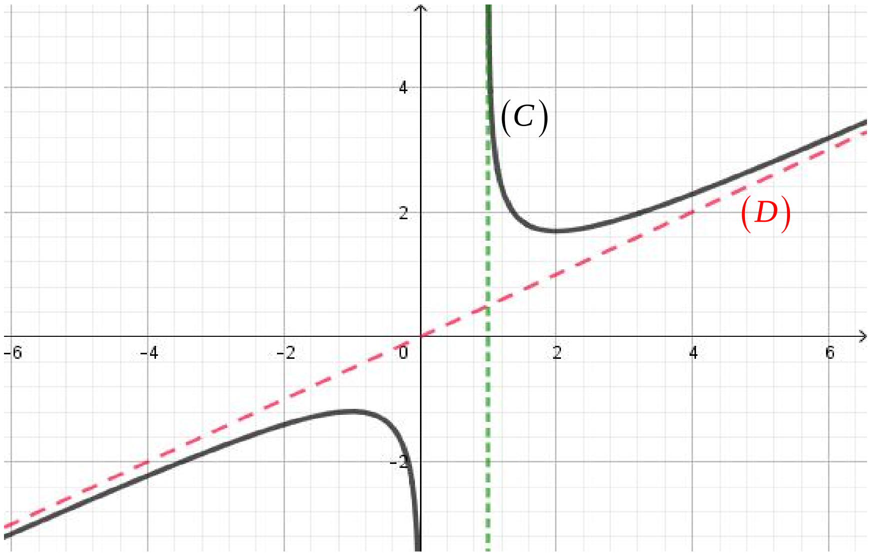
لدينا $f'(x)=\frac{x^2-x-2}{2x(x-1)}$

$f'(x)=-2$ تكافيء $\frac{x^2-x-2}{2x(x-1)}=-2$ ومنه $x^2-x-2=-4x(x-1)$ ومنه $5x^2-5x-2=0$

$\Delta=65$

المعادلة تقبل حلين ومنه (C) يقبل مماسين معامل توجيه كل منهما 2- .

⑥ رسم (C) و (D) :



⑦ مناقشة بيانيا حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=\frac{m}{2}x$:

- من أجل $\frac{m}{2}\in]-\infty;0[$ أي $m\in]-\infty;0[$ لاتوجد حلول . .
- من أجل $\frac{m}{2}\succ\frac{1}{2}$ أي $m\succ1$ معناه $m\in]1;+\infty[$ المعادلة لها حلان مختلفان في الاشارة .
- من أجل $\frac{m}{2}\in]0;1[$ أي $m\in\left]0;\frac{1}{2}\right[$ لاتوجد حلول .

بالتوفيق والنجاح في شهادة الباكالوريا